

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО**  
**ГОСПОДАРСТВА**

О. І. Рубаненко, В. П. Шпачук

**ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА.**  
**СПЕЦКУРС**

*Конспект лекцій*

(для студентів денної і заочної форм навчання бакалаврів  
за напрямом 6.060101 «Будівництво»)

**ХАРКІВ ХНАМГ 2008**

**Рубаненко О. І.** Теоретична механіка. Спецкурс: Конспект лекцій (для студентів денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямом 6.060101 «Будівництво») / О. І. Рубаненко, В. П. Шпачук; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. – Х.: ХНАМГ, 2008. – 157 с.

Автори: О. І. Рубаненко, В. П. Шпачук

Рецензенти:

М. Ф. Пацегон, проф., д-р ф.-м. наук, завідувач кафедри теоретичної механіки (Харківський національний університет ім. В. М. Каразіна),

О. К. Морачковський, д-р техн. наук, завідувач кафедри теоретичної механіки (Харківський національний технічний університет «ХПІ»).

Цей конспект лекцій складено з метою допомоги студентам будівельних спеціальностей при підготовці до практичних занять, контрольних робіт, заліків і іспитів, а також при виконанні розрахунково-графічної роботи із спецкурсу теоретичної механіки.

Він містить основні питання аналітичної статички і динаміки, стійкості положення рівноваги і малих коливань механічних систем зі скінченним числом степенів вільності, малих коливань пружних елементів будівельних конструкцій (балок, пластин, оболонок), а також теорії удару. У кожному розділі наведено приклади задач та методики їх розв'язання.

Рекомендовано кафедрою теоретичної і будівельної механіки,  
протокол № 8 від 06.02.2008 р.

## ВСТУП

Більшість будівельних конструкцій і їх елементів у процесі будівництва і експлуатації в тій чи іншій мірі підлягають дії динамічних навантажень. Ці навантаження викликаються:

- працюючими в будівлях машинами, турбоагрегатами, компресорами, мостовими кранами та іншим устаткуванням;
- дією вітру на висотні споруди й конструкції баштового типу, мости, наземні трубопроводи;
- сейсмічними діями, що передаються через ґрунт на фундаменти споруд;
- вібраціями від руху транспорту і поїздів метрополітену;
- ударами й вибухами як елементами технологічних процесів (штамповка за допомогою вибуху, забивання палів та ін.);
- вибухами при аваріях, акустичними вибуховими хвилями.

Пружні елементи будівельних конструкцій мають такі властивості, що при відхиленні від положення рівноваги виконують коливальний рух. Допустимий рівень коливань споруд і їх елементів визначається:

- фізіологічною дією коливань на людей;
- несучою здатністю конструкцій, що коливаються;
- впливом коливань на технологічні процеси виробництва;
- необхідністю забезпечення достатньої жорсткості й нормованих значень деформацій та прогинів при коливаннях.

Вібраційні дії з усіх видів механічних впливів на технічні об'єкти є найбільш небезпечними. Знакозмінні напруження, що викликаються вібрацією, сприяють накопиченню пошкоджень у матеріалах, появі тріщин і втомленістному руйнуванню, особливо в умовах резонансних явищ. Тому найбільша увага в даному спецкурсі приділяється визначенню основних характеристик коливального руху механічних систем і елементів будівельних конструкцій. Найважливішими характеристиками коливального руху є

частоти й форми власних коливань. Саме їх визначення є необхідним при розв'язанні більшості задач динаміки пружних систем.

*Спецкурс із теоретичної механіки* включає основи: аналітичної механіки, теорії стійкості рівноваги і малих коливань механічних систем зі скінченним числом степенів вільності, малих коливань пружних елементів будівельних конструкцій (балок, пластин, оболонок), а також теорії удару.

Для складання диференціальних рівнянь руху механічних систем зі скінченною кількістю степенів вільності використовуються методи аналітичної механіки, тому вивчення матеріалу спецкурсу починається з основ аналітичної механіки.

# I. ОСНОВИ АНАЛІТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Загальні теореми динаміки теоретичної механіки складають достатньо потужний інструмент дослідження руху механічної системи, проте їх застосування пов'язане з деякими труднощами. По-перше, часто не можна заздалегідь визначити, яка з теорем дозволить швидше розв'язати певну задачу. По-друге, при розв'язанні деяких задач доводиться вводити у розгляд невідомі реакції в'язей, визначення яких не завжди потрібно за умовою задачі. Нарешті, кожна окрема теорема не може повністю охарактеризувати рух системи, тобто з окремої теореми не можна отримати всю сукупність диференціальних рівнянь руху механічної системи.

*Аналітична механіка* – це розділ теоретичної механіки, в якому вивчаються найбільш загальні аналітичні методи складання і розв'язання задач механіки вільних і невільних систем матеріальних точок і твердих тіл.

Методи дослідження, розроблені в аналітичній механіці, використовуються як в інших областях механіки (теорія пружності, стійкості рівноваги і руху, малих коливань механічних систем, гіроскопів, автоматичного регулювання, автоматичного керування рухом літальних апаратів, динаміка неголономних систем, гідромеханіка та ін.), так і в суміжних областях природознавства (прикладна математика, термодинаміка, електродинаміка, робототехніка, статистична фізика, квантова механіка тощо).

Основу аналітичної механіки складають три групи положень:

- 1) варіаційні принципи – формулюють найбільш загальні закономірності механіки;
- 2) диференціальні рівняння руху системи матеріальних точок – є наслідками варіаційних принципів;
- 3) загальні методи інтегрування диференціальних рівнянь динаміки.

# 1. Основні поняття і принципи аналітичної статички й динаміки

Одними з основних понять аналітичної механіки є поняття в'язей і можливих (віртуальних) переміщень.

## 1.1. Механічні в'язі і їх класифікація

Поняття в'язі розглянуто в розділі “Статика” курсу теоретичної механіки і її дія на тіло характеризувалась реакцією в'язі. Але в'язь можна розглядати і як обмеження, що накладається на переміщення і швидкості точок системи. Такий шлях дозволяє отримати рівняння рівноваги або руху системи, які не містять заздалегідь невідомі реакції в'язей.

Система матеріальних точок називається *вільною*, якщо положення і швидкості окремих її точок можуть приймати будь-які значення. В іншому випадку система називається *невільною*. Обмеження, що накладаються на положення і швидкості окремих точок системи, називаються *в'язями*. Конструктивно механічні в'язі реалізуються за допомогою шарнірів, поверхонь, стержнів, ниток та ін. Проте в'язі можуть бути і не виключно механічними, а в сукупності, наприклад, із системами регулювання і керування.

Обмеження на положення і швидкості точок можна описати за допомогою рівностей або нерівностей, які називаються *рівняннями в'язей*. У загальному випадку рівняння в'язі для однієї точки можна записати у вигляді

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = 0. \quad (1.1)$$

Розглянемо декілька прикладів.

**Приклад 1.** Матеріальна точка  $M$  прикріплена до ідеального стержня  $OM$

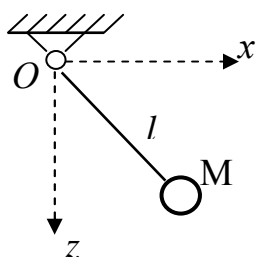


Рис. 1.1

довжиною  $l$  (рис. 1.1) і може здійснювати коливання у вертикальній площині  $xOz$ . Декартові координати матеріальної точки повинні задовольняти рівнянню

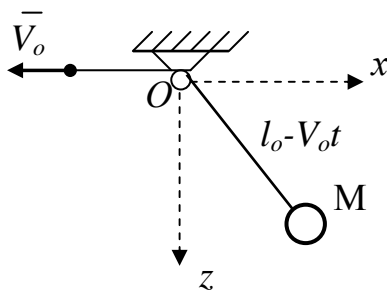
в'язі: 
$$x^2 + z^2 - l^2 = 0. \quad (1.1)$$

**Приклад 2.** Матеріальна точка  $M$  прикріплена до гнучкої нитки довжиною  $l$  (рис. 1.1). Рівняння в'язі буде:

$$x^2 + z^2 - l^2 \leq 0. \quad (1.2)$$

Знак рівності відповідає моментам часу, коли нитка буде натягнутою, а знак нерівності – коли нитка буде не натягнутою.

**Приклад 3.** Матеріальна точка  $M$  прикріплена до гнучкої нитки, інший кінець якої перекинутий через блок і рухається зі сталою швидкістю  $V_0$  (рис.1.2).



Рівняння в'язі буде:

$$x^2 + z^2 - (l_0 - V_0 t)^2 \leq 0, \quad (1.3)$$

де  $l_0$  - довжина частини нитки, що звисає, у початковий момент часу.

Рис. 1.2

**Приклад 4.** Куля рухається по горизонтальній шорсткій поверхні без ковзання (рис. 1.3).

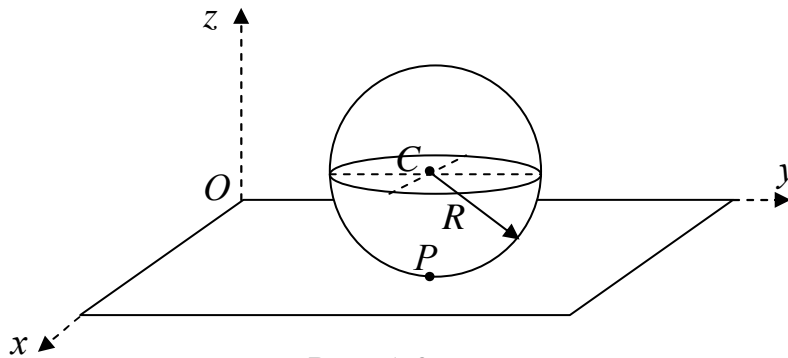


Рис. 1.3

При цьому координата  $z$  центра мас  $C$  кулі повинна задовольняти умові

$$z_c \geq R, \quad (1.4)$$

де  $R$  - радіус кулі. Крім того, швидкість точки  $P$  дотику кулі до поверхні дорівнює нулю:

$$\bar{V}_p = \bar{V}_c + \bar{\omega} \times \bar{CP} = 0,$$

що, згідно з теорією руху тіла з однією нерухомою точкою, еквівалентно двом скалярним рівностям:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_c - R(\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) &= 0, \\ \dot{y}_c + R(\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

де  $\psi, \theta, \varphi$  - кути Ейлера [5].

Введемо кілька визначень.

В'язі називаються **стаціонарними**, якщо рівняння (нерівності) в'язей не містять час  $t$  явно. В іншому випадку в'язі називаються **нестаціонарними**.

В'язі називаються **утримуючими (двобічними)**, якщо вони описуються рівностями. Якщо в'язі описуються нерівностями, вони називаються **неутримуючими (однобічними)**.

В'язі називаються **голономними**, якщо рівняння (нерівності) в'язей не містять проекції швидкостей, або містять у формі, що може бути зінтегрованою. В іншому випадку в'язі називаються **неголономними**.

У розглянутих прикладах в'язі можна охарактеризувати таким чином: в'язь, яка описується рівнянням (1.1), – стаціонарна, утримуюча, голономна; нерівністю (1.2), - стаціонарна, неутримуюча, голономна; нерівністю (1.3), - нестаціонарна, неутримуюча, голономна; нерівністю (1.4), - стаціонарна, неутримуюча, голономна; рівняннями (1.5), - стаціонарна, утримуюча, неголономна (оскільки рівняння (1.5) не можна зінтегрувати).

**Зауваження.** При розв'язанні задач неутримуючу в'язь можна розглядати як утримуючу, якщо під час руху (рівноваги) в'язь описується рівністю (наприклад, нитка весь час натягнута; тіло, що ковзає уздовж поверхні, не відривається від неї тощо).



## 1.2. Можливі переміщення. Можлива робота. Ідеальні в'язі

**Можливим (віртуальним) переміщенням точки  $\delta \vec{r}$**  називається уявне нескінченно мале її переміщення, що не суперечить накладеним на точку в'язям і відбувається у фіксований момент часу.

Слід підкреслити, що можливе переміщення – це переміщення, яке могла б здійснити точка, не порушуючи в'язей, і визначається тільки характером цих в'язей, а не діючими на точку силами.

**Приклад 5.** Матеріальна точка знаходиться на горизонтальній поверхні (рис. 1.4, а).

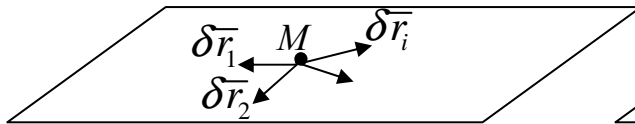


Рис. 1.4, а.

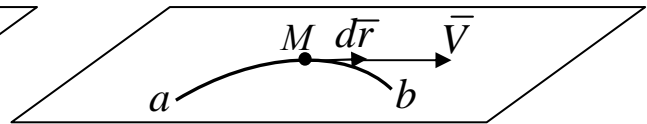


Рис. 1.4, б.

Можливі переміщення  $\delta \vec{r}_i$  – переміщення по поверхні у будь-якому напрямку. Число таких переміщень нескінченне. Вектор дійсного елементарного переміщення  $d\vec{r}$  (рис. 1.4, б) напрямлений по дотичній до траєкторії  $ab$  руху точки  $M$  у бік її швидкості  $\vec{V}$ .

На відміну від можливих, дійсні елементарні переміщення  $d\vec{r}_k$  механічної системи відбуваються під дією певних сил за проміжок часу  $dt$ . У разі векторного способу завдання руху

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(x_k, y_k, z_k, t),$$

де  $k = 1, \dots, N$  ( $N$  - число точок механічної системи), дійсні елементарні переміщення характеризуються нескінченно малими приростами радіусів-векторів  $\vec{r}_k$  і з точністю до малих другого порядку малізми визначаються їхніми **диференціалами**:

$$d\vec{r}_k = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial y_k} dy_k + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial z_k} dz_k + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} dt. \quad (1.6)$$

Можливі переміщення відбуваються при фіксованому часі  $t$  ( $\delta t = 0$ ) і з точністю до малих другого порядку мализни математично визначаються **варіаціями** радіусів-векторів  $\bar{r}_k$ :

$$\delta \bar{r}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial x_k} \delta x_k + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial y_k} \delta y_k + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial z_k} \delta z_k. \quad (1.7)$$

Із сказаного можна зробити висновок, що дійсні переміщення системи  $d\bar{r}_k$  є одними з її можливих переміщень  $\delta \bar{r}_k$  тільки в разі стаціонарних в'язей.

**Можливим (віртуальним) переміщенням механічної системи** називається сукупність можливих переміщень окремих її точок.

**Можливою роботою сили** називається скалярний добуток вектора сили  $\bar{F}$  на вектор можливого переміщення  $\delta \bar{r}$  точки її прикладення (або добуток модуля сили на модуль можливого переміщення точки її прикладення і на косинус кута між векторами сили і можливого переміщення точки її прикладення):

$$\delta A_F = \bar{F} \cdot \delta \bar{r} = F \cdot \delta r \cdot \cos(\widehat{\bar{F}, \delta \bar{r}}). \quad (1.8)$$

Введемо ще одну класифікацію в'язей.

В'язі називаються **ідеальними**, якщо сума робіт їх реакцій на будь-яких можливих переміщеннях механічної системи дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^N \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0, \quad (1.9)$$

де  $\bar{R}_k$  - рівнодійна реакцій в'язей, прикладених до  $k$ -ї точки системи.

**Приклади ідеальних в'язей:**

1). *Ідеально гладенька поверхня* (рис. 1.5).

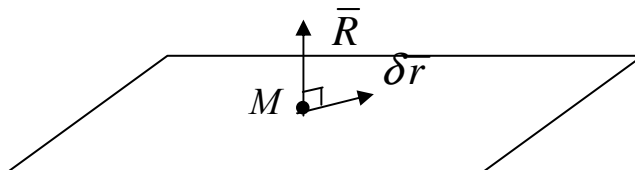


Рис. 1.5

Оскільки реакція  $\bar{R}$  перпендикулярна до поверхні, а можливе переміщення точки  $M$   $\delta\bar{r}$  лежить у її площині, то

$$\delta A_R = \bar{R} \cdot \delta\bar{r} = R \cdot \delta r \cdot \cos 90^\circ = 0.$$

2). *Нерухомий шарнір без тертя* (рис. 1.6).

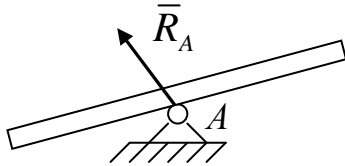


Рис. 1.6

Оскільки точка  $A$  нерухома, то її можливе переміщення  $\delta r_A = 0$ , отже

$$\delta A_{R_A} = \bar{R}_A \cdot \delta\bar{r}_A = \bar{R}_A \cdot 0 = 0.$$

3). *Рухомий шарнір без тертя* (рис. 1.7).

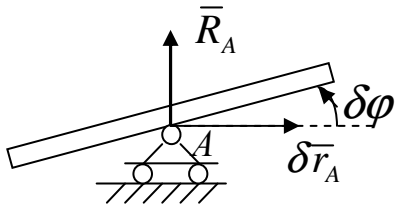


Рис. 1.7

У даному випадку, якщо точка  $A$  отримає можливе переміщення  $\delta\bar{r}_A$ , то

$$\delta A_{R_A} = \bar{R}_A \cdot \delta\bar{r}_A = R_A \cdot \delta r_A \cdot \cos 90^\circ = 0.$$

Якщо тіло обернеться навколо точки  $A$  на можливий кут  $\delta\varphi$ , то

$$\delta A_{R_A} = M_A(\bar{R}_A) \cdot \delta\varphi = 0 \cdot \delta\varphi = 0.$$

4). *Кочення без ковзання* абсолютно твердого тіла по шорсткій абсолютно твердій поверхні (рис. 1.8).

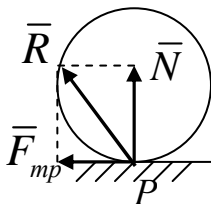


Рис. 1.8

Оскільки точка  $P$  є миттєвим центром швидкостей, то її швидкість, а значить і можливе переміщення дорівнюють нулю. Тоді можлива робота реакції  $\bar{R}$

$$\delta A_R = \bar{R} \cdot \delta\bar{r} = \bar{R} \cdot 0 = 0.$$

5). *Жорстка незмінна система* (абсолютно тверде тіло, ідеальний стержень та ін.).

Розглянемо дві матеріальні точки, зв'язані ідеальним стержнем (рис.1.9).

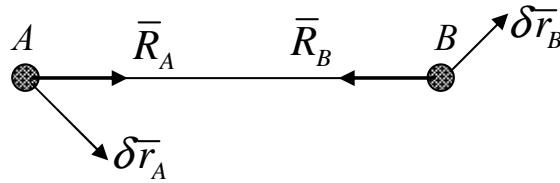


Рис. 1.9

Реакції стержня на матеріальні точки  $A$  і  $B$  напрямлені по стержню і  $\bar{R}_A = -\bar{R}_B$ . З умови нерозтягнення стержня маємо:

$$(\bar{r}_B - \bar{r}_A)^2 = (AB)^2, \quad (AB = \text{const}).$$

Застосуємо далі операцію варіації (див. формулу (1.7)) до останнього рівняння:

$$(\bar{r}_B - \bar{r}_A) \cdot (\delta \bar{r}_B - \delta \bar{r}_A) = 0.$$

Рівність нулю скалярного добутку векторів  $(\bar{r}_B - \bar{r}_A)$  і  $(\delta \bar{r}_B - \delta \bar{r}_A)$  означає, що ці вектори є взаємно перпендикулярними.

Знайдемо тепер суму можливих робіт реакцій в'язей  $\bar{R}_A, \bar{R}_B$  на можливому переміщенні системи:

$$\delta A = \bar{R}_A \cdot \delta \bar{r}_A + \bar{R}_B \cdot \delta \bar{r}_B = -\bar{R}_B \cdot \delta \bar{r}_A + \bar{R}_B \cdot \delta \bar{r}_B = \bar{R}_B \cdot (\delta \bar{r}_B - \delta \bar{r}_A) = 0.$$

Останній добуток дорівнює нулю, оскільки вектор  $\bar{R}_B$ , який співпадає з напрямком вектора  $(\bar{r}_B - \bar{r}_A)$ , перпендикулярний до вектора  $(\delta \bar{r}_B - \delta \bar{r}_A)$ .

Таким чином, отримано, що ідеальний стержень, а також внутрішні в'язі абсолютно твердого тіла є ідеальними в'язями.

### 1.3. Принцип можливих переміщень

Сили, що діють на невільну механічну систему, можна поділити на активні і реакції в'язей. *Активними* будемо вважати сили, що спричиняють свою дією прискорення точок системи або реакції в'язей. Активні сили не залежать від в'язей. *Реакції в'язей* вважають пасивними силами, бо вони виникають лише тоді, коли на систему діють активні сили.

**Принцип можливих переміщень** – це найзагальніший принцип аналітичної статички, який встановлює умови рівноваги механічної системи. У сучасному вигляді він формулюється за допомогою **теорему Лагранжа-Остроградського**: для рівноваги механічної системи з ідеальними, голономними, стаціонарними і утримуючими в'язями необхідно і достатньо, щоб сума робіт всіх активних сил на будь-якому можливому переміщенні системи і швидкості всіх точок в початковий момент часу дорівнювали нулю:

$$\delta A = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k^a \cdot \delta \bar{r}_k = 0, \quad \bar{V}_k \Big|_{t=0} = 0. \quad (1.10)$$

### Доведення

**Необхідність.** Нехай система  $N$  матеріальних точок знаходиться в рівновазі. Тоді для кожної точки, відповідно до умови рівноваги системи збіжних сил, виконується рівність

$$\bar{F}_k^a + \bar{R}_k = 0, \quad (k = 1, \dots, N), \quad (1.11)$$

де  $\bar{F}_k^a, \bar{R}_k$  - рівнодійні активних сил і реакцій в'язей відповідно, які прикладені до  $k$ -ї точки системи.

Надамо системі можливе переміщення  $\delta \bar{r}_k$ , помножимо рівність (1.11) скалярно на вектор  $\delta \bar{r}_k$  і підсумуємо для всіх точок системи:

$$\sum_{k=1}^N (\bar{F}_k^a + \bar{R}_k) \cdot \delta \bar{r}_k = 0,$$

або

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k^a \cdot \delta \bar{r}_k + \sum_{k=1}^N \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0. \quad (1.12)$$

За визначенням ідеальних в'язей (1.9), другий доданок у (1.12) дорівнює нулю, тому виконується

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k^a \cdot \delta \bar{r}_k = 0.$$

Необхідність, таким чином, доведена.

*Достатність.* Доведення проведемо від супротивного. Припустимо, що умови (1.10) виконуються, але система почала рухатись із стану спокою ( $\bar{V}_k|_{t>0} \neq 0$ ). Оскільки в'язі стаціонарні, то елементарне дійсне переміщення  $d\bar{r}_k$  буде співпадати з одним із можливих  $\delta\bar{r}_k$ . На підставі теореми про зміну кінетичної енергії системи, враховуючи, що кінетична енергія системи  $T$  у довільний момент часу додатна ( $T > 0$ ), а у стані спокою дорівнює нулю ( $T_0 = 0$ ), матимемо

$$T - T_0 = \delta A > 0,$$

або, враховуючи (1.8)

$$\delta A = \sum_{k=1}^N (\bar{F}_k^a + \bar{R}_k) \cdot \delta\bar{r}_k > 0.$$

Оскільки в'язі ідеальні, то виконується умова (1.9). Тоді залишається вираз

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k^a \cdot \delta\bar{r}_k > 0,$$

що суперечить початковому припущенню. Отже, достатність, а з нею і вся теорема доведена.

Рівняння (1.10) можна подати і у скалярній формі:

$$\sum_{k=1}^N (F_{kx}^a \cdot \delta x_k + F_{ky}^a \cdot \delta y_k + F_{kz}^a \cdot \delta z_k) = 0, \quad (1.13)$$

де  $\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k$  - проекції можливого переміщення  $\delta\bar{r}_k$  на осі координат.

Рівняння (1.10) (або (1.13)) називають **загальним рівнянням статки**.

Важливо підкреслити, що принцип можливих переміщень дозволяє скласти умови рівноваги механічної системи, не враховуючи реакції ідеальних в'язей. При цьому перевага над звичайними геометричними методами статки відчутна тим більше, чим більше твердих тіл входить до системи.

Проте в ряді задач статички є потреба визначати реакції в'язей. Зробимо деякі зауваження при застосуванні принципу можливих переміщень у технічних розрахунках.

**Зауваження 1.** Якщо в механічній системі є неідеальні в'язі, то їх реакції (наприклад, сили тертя, пружні в'язі) потрібно віднести до активних сил.

**Зауваження 2.** Для визначення реакції ідеальної в'язі її треба відкинути, а відповідну реакцію додати до активних сил.

**Зауваження 3.** Принцип можливих переміщень дозволяє скласти одне рівняння, з якого можна визначити тільки одну невідому величину. Якщо реакція ідеальної в'язі складається з декількох складових реакцій (наприклад, нерухомий шарнір, защемлення), тоді в'язь треба замінити іншою, яка забезпечить можливе переміщення точки системи, де розташована в'язь, у напрямку дії складової реакції, яку треба визначити. Наприклад, для визначення вертикальної складової реакції нерухомого шарніра його треба замінити вертикально розташованим повзуном з шарнірним кріпленням до конструкції і додати вертикальну складову реакції до активних сил. Для визначення вертикальної складової реакції защемлення в'язь можна замінити вертикально розташованим повзуном, до якого розглядувана конструкція кріпиться жорстко, а для визначення моменту пари сил у защемленні – нерухомим шарніром.

#### **1.4. Загальне рівняння динаміки**

Принцип можливих переміщень дає загальний метод розв'язання задач статички. З іншого боку, принцип Даламбера дозволяє використовувати методи статички для розв'язання задач динаміки. Отже, застосовуючи ці два принципи одночасно, можна отримати загальний метод розв'язання задач динаміки.

Розглянемо систему з ідеальними, голономними і утримуючими в'язями, що складається з  $N$  матеріальних точок. Згідно з принципом

Даламбера в будь-який момент часу геометрична сума рівнодійних активних сил, реакцій в'язей і сили інерції для кожної матеріальної точки дорівнює нулю:

$$\bar{F}_k^a + \bar{R}_k + \bar{\Phi}_k^{in} = 0, \quad (k = 1, \dots, N). \quad (1.14)$$

Уявно зафіксуємо час  $t$  і надамо системі можливе переміщення  $\delta \bar{r}_k$ . Помноживши ліві й праві частини рівнянь (1.14) скалярно на  $\delta \bar{r}_k$  і підсумовуючи за індексом  $k$ , отримаємо :

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k^a \cdot \delta \bar{r}_k + \sum_{k=1}^N \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k + \sum_{k=1}^N \bar{\Phi}_k^{in} \cdot \delta \bar{r}_k = 0. \quad (1.15)$$

Згідно з визначенням ідеальних в'язей (1.9), другий доданок рівняння (1.15) дорівнює нулю. Отже,

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k^a \cdot \delta \bar{r}_k + \sum_{k=1}^N \bar{\Phi}_k^{in} \cdot \delta \bar{r}_k = 0 \quad (1.16)$$

або

$$\delta A + \delta A^{in} = 0. \quad (1.17)$$

Рівняння (1.17) (або (1.16)) називається **загальним рівнянням динаміки** (або **принципом Даламбера-Лагранжа**) і формулюється наступним чином: *під час руху системи з ідеальними, голономними і утримуючими в'язями в кожний момент часу сума робіт активних сил і сил інерції на будь-якому можливому переміщенні системи дорівнює нулю.*

Оскільки сили інерції визначаються за допомогою прискорень точок системи, які, в свою чергу, можна подати як другі похідні за часом радіусів-векторів (або декартових координат) точок, то загальне рівняння динаміки дозволяє у загальному випадку складати диференціальні рівняння руху механічної системи. При цьому реакції ідеальних в'язей не враховуються.

Порівнюючи загальне рівняння динаміки (1.17) із загальним рівнянням статички (1.10), бачимо, що перше з них відрізняється від другого наявністю можливої роботи сил інерції  $\delta A^{in}$ .



## 2. Рівняння рівноваги і руху механічної системи в узагальнених координатах

### 2.1. Число степенів вільності. Узагальнені координати й узагальнені швидкості

У загальному випадку система може мати безліч різних можливих переміщень. Проте можна вказати деяке число таких незалежних між собою можливих переміщень, що усяке інше переміщення може бути через них виражено. Наприклад, для точки, що може рухатись у площині, будь-яке можливе переміщення може бути виражено як  $\delta \vec{r} = a \cdot \delta \bar{x} + b \cdot \delta \bar{y}$ , де  $\delta \bar{x}, \delta \bar{y}$  - можливі переміщення уздовж осей  $x, y$  відповідно,  $a, b$  - певні числа. У цьому випадку число незалежних можливих переміщень дорівнює двом.

Число незалежних між собою можливих переміщень механічної системи називається **числом степенів вільності**.

Розглянемо систему, що складається з  $N$  матеріальних точок. В інерціальній системі відліку  $Oxyz$  положення кожної точки визначається трьома декартовими координатами  $x_k, y_k, z_k$ , а положення усіх точок –  $3N$  координатами. Припустимо, що рух системи обмежений  $h$  ідеальними, голономними і утримуючими в'язями:

$$f_i(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) = 0 \quad (i = 1, \dots, h).$$

Оскільки  $3N$  координат задовольняють  $h$  рівнянням в'язей, то вони не є незалежними. Очевидно, число незалежних координат, що визначають положення системи, буде  $s = 3N - h$ .

При розв'язанні багатьох задач механіки невіільних систем можна добитись значних спрощень, якщо положення системи визначати за допомогою  $s$  яких-небудь незалежних параметрів. При цьому рівняння голономних в'язей задовольняються автоматично і зникає потреба

враховувати їх при розв'язанні задач. Незалежні між собою параметри  $q_1, \dots, q_s$ , що однозначно визначають положення механічної системи, називаються *узагальненими координатами*.

Для систем з голономними в'язями *число узагальнених координат дорівнює числу степенів вільності*.

Узагальнені координати можуть мати різні геометричні й механічні змісти. Це можуть бути деякі незалежні декартові координати, лінійні переміщення, кути повороту тощо. У суміжних розділах механіки, наприклад, у теорії пружності роль узагальнених координат виконують переміщення точок пружного тіла, деформації і напруження, прогин балок і пластин, у гідродинаміці – густина, температура або швидкості точок суцільного середовища.

Похідна за часом від узагальненої координати називається *узагальненою швидкістю*:

$$\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt} \quad (j = 1, \dots, s). \quad (2.1)$$

Фізичний зміст узагальнених координат і швидкостей можна встановити на конкретних прикладах.

**Приклад 1.** Якщо узагальнена координата  $q = \varphi$  - кут повороту, то  $\dot{q} = \dot{\varphi} = \omega$  - кутова швидкість.

**Приклад 2.** Якщо  $q = s$  - лінійне переміщення, то  $\dot{q} = \dot{s} = V$  - лінійна швидкість.

**Приклад 3.** У випадку, якщо  $q_1 = x$ ,  $q_2 = y$  - декартові координати, то  $\dot{q}_1 = \dot{x} = V_x$ ,  $\dot{q}_2 = \dot{y} = V_y$  - проекції швидкості на осі координат.

## 2.2. Узагальнені сили і способи їх визначення

Розглянемо систему, що складається з  $N$  матеріальних точок, на яку діють активні сили  $\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_N$ . Її положення будемо визначати за допомогою

$s$  узагальнених координат  $q_1, \dots, q_s$ . Оскільки положення точок системи визначаються за допомогою їх радіусів-векторів  $\bar{r}_k$ , то останні можна виразити через узагальнені координати і час:

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, \dots, q_s, t) \quad (k = 1, \dots, N). \quad (2.2)$$

Ці  $N$  векторних рівнянь еквівалентні  $3N$  скалярним рівнянням

$$\begin{aligned} x_k &= x_k(q_1, \dots, q_s, t), \\ y_k &= y_k(q_1, \dots, q_s, t), \\ z_k &= z_k(q_1, \dots, q_s, t), \quad (k = 1, \dots, N). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Виразимо варіації декартових координат  $\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k$  через варіації узагальнених координат  $\delta q_1, \dots, \delta q_s$ , беручи до уваги, що варіації визначаються при фіксованому часі ( $\delta t = 0$ ). Наприклад,

$$\delta x_k = \frac{\partial x_k}{\partial q_1} \cdot \delta q_1 + \dots + \frac{\partial x_k}{\partial q_s} \cdot \delta q_s = \sum_{j=1}^s \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \cdot \delta q_j. \quad (2.4)$$

Аналогічно визначаються  $\delta y_k, \delta z_k$ .

Обчислимо можливу роботу активних сил системи:

$$\begin{aligned} \delta A &= \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k = \sum_{k=1}^N (F_{kx} \cdot \delta x_k + F_{ky} \cdot \delta y_k + F_{kz} \cdot \delta z_k) = \\ &= \sum_{k=1}^N (F_{kx} \cdot \sum_{j=1}^s \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \cdot \delta q_j + F_{ky} \cdot \sum_{j=1}^s \frac{\partial y_k}{\partial q_j} \cdot \delta q_j + F_{kz} \cdot \sum_{j=1}^s \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \cdot \delta q_j) \end{aligned}$$

або, змінюючи порядок підсумовування, отримаємо

$$\delta A = \sum_{j=1}^s \left[ \sum_{k=1}^N \left( F_{kx} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + F_{ky} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + F_{kz} \cdot \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right) \right] \cdot \delta q_j. \quad (2.5)$$

Введемо позначення

$$Q_j = \sum_{k=1}^N \left( F_{kx} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + F_{ky} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + F_{kz} \cdot \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right). \quad (2.6)$$

Тоді рівність (2.5) набуде вигляду

$$\delta A = \sum_{j=1}^s Q_j \cdot \delta q_j = Q_1 \cdot \delta q_1 + \dots + Q_s \cdot \delta q_s. \quad (2.7)$$

Множник  $Q_j$  при варіації узагальненої координати  $\delta q_j$  у виразі можливої роботи активних сил системи  $\delta A$  називається **узагальненою силою**, що відповідає узагальненій координаті  $q_j$ .

Розмірність узагальненої сили може бути різною і, як впливає з рівняння (2.7), залежить від розмірності узагальненої координати. Наприклад, якщо узагальнена координата є лінійним переміщенням, то розмірність узагальненої сили співпадає з розмірністю сили. Якщо ж узагальнена координата є кутом повороту, то розмірність узагальненої сили співпадає з розмірністю моменту сили.

Наведемо **три способи обчислення узагальненої сили**.

**Спосіб 1.** Узагальнену силу можна визначити безпосередньо за формулою (2.6), тобто через проекції активних сил на осі декартової системи координат. При цьому треба отримати залежності декартових координат точок прикладення сил від узагальнених координат. Цей спосіб можна використовувати для механічної системи, що складається з невеликої кількості точок.

**Спосіб 2.** Для визначення узагальненої сили можна скористатись формулою (2.7), враховуючи, що можливі переміщення довільні й незалежні. Щоб знайти узагальнену силу, наприклад  $Q_1$ , надамо системі таке можливе переміщення, при якому всі варіації узагальнених координат, крім  $\delta q_1$ , дорівнюють нулю:

$$\delta q_1 \neq 0, \quad \delta q_2 = \delta q_3 = \dots = \delta q_s = 0.$$

Обчислимо на цьому переміщенні можливу роботу всіх активних сил, що прикладені до системи. На підставі формули (2.7) матимемо

$$\delta A_1 = Q_1 \cdot \delta q_1.$$

Множник  $Q_1$  при варіації узагальненої координати  $\delta q_1$  буде першою узагальненою силою.

Аналогічно поступають при визначенні всіх інших узагальнених сил  $Q_2, Q_3, \dots, Q_s$ . Цей спосіб є найбільш універсальним.

**Спосіб 3.** Цей спосіб застосовують тільки для консервативних сил. Сили називаються **консервативними** (або **потенціальними**), якщо: 1) вони залежать тільки від положення точок системи; 2) їх робота на переміщенні системи з початкового положення у кінцеве не залежить від шляху, по якому здійснюється це переміщення. Для консервативних сил мають виконуватись умови:

$$F_{kx} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_k}, F_{ky} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_k}, F_{kz} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_k}, \quad (2.8)$$

де  $\Pi = \Pi(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N)$  - **потенціальна енергія** силового поля, що є функцією координат точок системи і визначається як робота консервативних сил при переміщенні системи із даного положення  $M$  в нульове  $M_0$  (те положення, де потенціальна енергія приймається рівною нулю  $\Pi = 0$ ):

$$\Pi = A_{MM_0}. \quad (2.9)$$

### Приклади консервативних сил.

1). Сила ваги  $P = mg$ . Потенціальна енергія визначається за формулою

$$\Pi_P = mg(z - z_0), \quad (2.10)$$

де  $z, z_0$  - вертикальні координати даного і нульового положень точки прикладення сили ваги (за умови напрямлення осі  $z$  вертикально уверх). З формули (2.10) випливає, що потенціальна енергія сили ваги додатна  $\Pi_P > 0$ , якщо дане положення знаходиться вище за нульове ( $z > z_0$ ), від'ємна  $\Pi_P < 0$ , якщо дане положення нижче за нульове ( $z < z_0$ ), і

дорівнює нулю  $\Pi_p = 0$ , якщо дане положення і нульове знаходяться на одному рівні за висотою.

2). Сила пружності пружини  $F_{np} = c\lambda$ , де  $c$  - коефіцієнт жорсткості пружини,  $\lambda$  - деформація пружини (зміна її довжини по відношенню до ненапруженої пружини). Потенціальна енергія визначається за формулою

$$\Pi_{F_{np}} = \frac{c}{2} \cdot (\lambda^2 - \lambda_0^2), \quad (2.11)$$

де  $\lambda, \lambda_0$  - деформації пружини у даному й нульовому положеннях.

Підставимо далі формули (2.8) у формулу (2.6), тоді

$$Q_j = - \sum_{k=1}^N \left( \frac{\partial \Pi}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_k} \cdot \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right).$$

Коли взяти до уваги, що потенціальна енергія, яка залежить від декартових координат точок системи, є складною функцією узагальнених координат, то останню формулу можна записати у наступному вигляді

$$Q_j = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j = 1, \dots, s). \quad (2.12)$$

Таким чином, узагальнені сили консервативної системи дорівнюють взятим зі знаком мінус частинним похідним потенціальної енергії системи за відповідними узагальненими координатами.

**Приклад 4.** Визначити узагальнену силу математичного маятника, що складається з ідеального стержня ОМ довжиною  $l$  і матеріальної точки М масою  $m$  (рис. 2.1).

#### Розв'язання

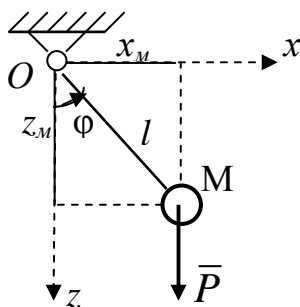


Рис. 2.1

Будемо визначати положення точки М за допомогою кута  $\varphi$  відхилення стержня ОМ від вертикалі. Система має один степінь вільності і за узагальнену координату  $q$  приймемо кут повороту стержня  $q = \varphi$ . Зобразимо точку М у довільному

положенні при коливаннях маятника. На точку  $M$  діє тільки сила ваги  $\bar{P} = m\bar{g}$ . Розглянемо три способи визначення узагальненої сили.

**Спосіб 1.** Помістимо початок декартової системи координат в точку закріплення маятника (рис. 2.1). Визначимо проекції сили ваги на осі координат і виразимо декартові координати точки її прикладення через узагальнену координату  $\varphi$ :

$$P_x = 0, P_z = P = mg, x_M = l \cdot \sin \varphi, z_M = l \cdot \cos \varphi.$$

Обчислимо далі частинні похідні

$$\frac{\partial x_M}{\partial \varphi} = l \cdot \cos \varphi, \quad \frac{\partial z_M}{\partial \varphi} = -l \cdot \sin \varphi.$$

Формула (2.6) у цьому разі набуває вигляду

$$Q_\varphi = P_x \cdot \frac{\partial x_M}{\partial \varphi} + P_z \cdot \frac{\partial z_M}{\partial \varphi} = 0 + mg \cdot (-l \cdot \sin \varphi) = -mgl \cdot \sin \varphi.$$

**Спосіб 2.** Зафіксуємо час  $t$  і надамо системі можливе переміщення  $\delta\varphi$ ,

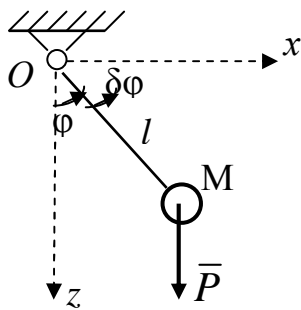


Рис. 2.2

наприклад, у бік відліку узагальненої координати  $\varphi$ , тобто повернемо стержень  $OM$  на малий кут  $\delta\varphi$  (рис. 2.2). Обчислимо можливу роботу сили ваги як добуток її моменту відносно точки  $O$  на можливе переміщення  $\delta\varphi$ . Добуток буде від'ємний, оскільки напрями моменту сили  $\bar{P}$  і можливого кута повороту стержня  $\delta\varphi$  не збігаються:

$$\delta A = -|M_o(\bar{P})| \cdot \delta\varphi = -P \cdot (l \cdot \sin \varphi) \cdot \delta\varphi = -mgl \cdot \sin \varphi \cdot \delta\varphi.$$

Множник  $Q_\varphi = -mgl \cdot \sin \varphi$  при варіації узагальненої координати  $\delta\varphi$  і буде узагальненою силою, що відповідає узагальненій координаті  $\varphi$ .

**Спосіб 3.** Враховуючи, що діюча на точку  $M$  сила ваги  $\bar{P}$  консервативна, визначимо потенціальну енергію системи. За нульове приймемо положення

маятника у стані спокою  $OM_0$  (рис. 2.3). Різниця висот між розглядуваним  $M$  і нульовим  $M_0$  положеннями дорівнює

$$z - z_0 = OM_0 - OK = l - l \cdot \cos \varphi = l \cdot (1 - \cos \varphi).$$

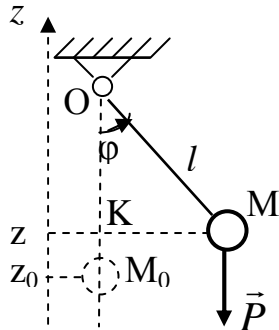


Рис. 2.3

Обчислимо потенціальну енергію системи, використовуючи формули (2.9), (2.10):

$$\Pi = \Pi_p = mg(z - z_0) = mgl \cdot (1 - \cos \varphi).$$

Узагальнена сила, відповідно до формули (2.12), буде

$$Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -mgl \cdot \sin \varphi.$$

### 2.3. Рівняння рівноваги механічної системи в узагальнених координатах

Будемо визначати положення механічної системи з ідеальними, стаціонарними, голономними й утримуючими в'язями з  $s$  степенями вільності узагальненими координатами  $q_1, \dots, q_s$ . Згідно з принципом можливих переміщень, при рівновазі системи за умови нульових початкових швидкостей її точок виконується рівність (1.10), яку з урахуванням формули (2.7) можна записати як

$$\delta A = \sum_{j=1}^s Q_j \cdot \delta q_j = Q_1 \cdot \delta q_1 + \dots + Q_s \cdot \delta q_s = 0. \quad (2.13)$$

Оскільки варіації узагальнених координат незалежні й довільні при голономних в'язях, то для виконання рівності (2.13) усі коефіцієнти при  $\delta q_j$  мають дорівнювати нулю. Дійсно, припустимо, що  $\delta q_1 \neq 0$ , а решта варіацій дорівнює нулю:  $\delta q_2 = \dots = \delta q_s = 0$ . Тоді з (2.13) випливає, що  $\delta A = Q_1 \cdot \delta q_1 = 0$ . Оскільки  $\delta q_1 \neq 0$ , то повинен дорівнювати нулю множник  $Q_1 = 0$ . Аналогічно можна довести, що множники при всіх інших



варіаціях узагальнених координат дорівнюють нулю. Отже, у стані рівноваги механічної системи мають виконуватись рівності

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad \dots, \quad Q_s = 0. \quad (2.14)$$

Рівності (2.14) виражають **умови рівноваги невіЛЬНОї механічної системи в узагальнених координатах**: для рівноваги невіЛЬНОї механічної системи з ідеальними, стаціонарними, голономними й утримуючими в'язями необхідно і достатньо, щоб усі узагальнені сили дорівнювали нулю (при нульових початкових швидкостях усіх точок системи).

Якщо всі активні сили, що діють на механічну систему, є консервативними, то рівняння (2.14) з урахуванням (2.12) набувають вигляду

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} = 0. \quad (2.15)$$

## 2.4. Диференціальні рівняння руху механічної системи в узагальнених координатах (рівняння Лагранжа другого роду)

Як було зазначено у §1.4, загальне рівняння динаміки дозволяє скласти диференціальні рівняння руху механічної системи, що не містять реакції ідеальних в'язей. Для досить простих систем застосування цього рівняння цілком виправдане. Але для складних систем застосування загального рівняння динаміки призводить до відносно громіздких перетворень. У цих випадках зручніше користуватися рівняннями Лагранжа другого роду, які отримують перетворенням загального рівняння динаміки до узагальнених координат.

Розглянемо систему, що складається з  $N$  матеріальних точок, на яку діють активні сили  $\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_N$ . Її положення будемо визначати за допомогою  $s$  узагальнених координат  $q_1, \dots, q_s$ . Зважаючи на визначення сили інерції матеріальної точки  $\bar{\Phi}^{in} = -m\bar{a}$ , загальне рівняння динаміки (1.16) можна записати у вигляді

$$\sum_{k=1}^N (\bar{F}_k - m\bar{a}_k) \cdot \delta\bar{r}_k = 0. \quad (2.16)$$

За аналогією з формулою (2.4), запишемо варіацію радіуса-вектора  $k$  – і точки системи (2.2), який є складною функцією змінних  $q_1, \dots, q_s$ , у вигляді

$$\delta\bar{r}_k = \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_1} \cdot \delta q_1 + \dots + \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_s} \cdot \delta q_s = \sum_{j=1}^s \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_j} \cdot \delta q_j. \quad (2.17)$$

Підставимо формулу (2.17) у рівняння (2.16):

$$\sum_{k=1}^N (\bar{F}_k - m\bar{a}_k) \cdot \sum_{j=1}^s \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_j} \cdot \delta q_j = 0.$$

Змінимо порядок підсумовування:

$$\sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^N [(\bar{F}_k - m_k \bar{a}_k) \cdot \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_j}] \cdot \delta q_j = 0.$$

Далі розіб'ємо суму на дві частини і замінимо  $\bar{a}_k = \ddot{\bar{r}}_k$  :

$$\sum_{j=1}^s [\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_j} - \sum_{k=1}^N m_k \cdot \ddot{\bar{r}}_k \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_j}] \cdot \delta q_j = 0.$$

Користуючись виразом для узагальнених сил (2.6) у векторній формі, матимемо

$$\sum_{j=1}^s [\mathcal{Q}_j - \sum_{k=1}^N m_k \cdot \ddot{\bar{r}}_k \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_j}] \cdot \delta q_j = 0. \quad (2.18)$$

Розглянемо деякі математичні перетворення.

1). Здиференціюємо рівняння (2.2) за часом:

$$\dot{\bar{r}}_k = \sum_{j=1}^s \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial t}, \quad (k = 1, \dots, N). \quad (2.19)$$

Взявши частинні похідні від лівої і правої частин рівняння (2.19) за узагальненою швидкістю  $\dot{q}_j$ , отримаємо співвідношення

$$\frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}. \quad (2.20)$$

2). Знайдемо частинну похідну рівняння (2.19) за узагальненою координатою  $q_j$ :

$$\frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_1 \partial q_j} \cdot \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_s \partial q_j} \cdot \dot{q}_s + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial t \partial q_j}. \quad (2.21)$$

Далі здиференціюємо за часом вираз  $\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}$  як складну функцію змінних

$q_1, \dots, q_s$ , а також часу  $t$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_j \partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_j \partial q_s} \cdot \dot{q}_s + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_j \partial t}. \quad (2.22)$$

Порівнюючи вирази (2.21), (2.22) і зважаючи на те, що змішані частинні похідні не залежать від порядку диференціювання, отримаємо рівність

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_j}. \quad (2.23)$$

Складемо тепер вираз кінетичної енергії системи:

$$T = \sum_{k=1}^N \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{2} \cdot \dot{\bar{r}}_k^2. \quad (2.24)$$

Знайдемо деякі похідні від кінетичної енергії:

$$\text{а) } \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{2} \cdot 2 \dot{\bar{r}}_k \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^N m_k \cdot \dot{\bar{r}}_k \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_j}; \quad (2.25)$$

$$\text{б) } \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{2} \cdot 2 \dot{\bar{r}}_k \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^N m_k \cdot \dot{\bar{r}}_k \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^N m_k \cdot \dot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}, \quad (2.26)$$

де при отриманні останньої рівності у формулі (2.26) враховані співвідношення (2.20);

$$в) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = \sum_{k=1}^N m_k \cdot \ddot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} + \sum_{k=1}^N m_k \cdot \dot{\bar{r}}_k \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_j}, \quad (2.27)$$

де при отриманні останньої суми у формулі (2.27) враховані співвідношення (2.23).

Різниця між формулами (2.27) і (2.25) буде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^N m_k \cdot \ddot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}, \quad (2.28)$$

оскільки друга сума правої частини (2.27) дорівнює правій частині (2.25).

Таким чином, загальне рівняння динаміки (2.18) з урахуванням (2.28) можна записати так:

$$\sum_{j=1}^s \left[ Q_j - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \cdot \delta q_j = 0. \quad (2.29)$$

Остання рівність виконується лише тоді, коли коефіцієнти при довільних значеннях незалежних варіацій  $\delta q_j$  дорівнюють нулю. Це можна записати у вигляді системи рівнянь

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad (j = 1, \dots, s), \quad (2.30)$$

які називаються **рівняннями Лагранжа другого роду** і читаються наступним чином: *різниця між повною похідною за часом від частинної похідної кінетичної енергії системи за узагальненою швидкістю і частинною похідною кінетичної енергії системи за узагальненою координатою дорівнює відповідній узагальненій силі.*

Рівняння (2.30) – це система звичайних диференціальних рівнянь другого порядку відносно узагальнених координат  $q_j(t)$ , які є невідомими функціями часу і являють собою закон руху системи.

Відмітимо деякі *особливості рівнянь Лагранжа.*

1. Кількість рівнянь (2.30) дорівнює числу степенів вільності, тобто їх найменшій можливій кількості для голономних систем. З цього погляду

метод Лагранжа є найбільш економічним.

2. Форма запису рівнянь (2.30) не залежить від конкретного вибору узагальнених координат і дозволяє скласти єдину послідовність дій, яку треба виконати при розв'язанні задачі динаміки. Це робить метод Лагранжа достатньо універсальним.

3. Метод Лагранжа є, по суті, енергетичним, оскільки потребує складання кінетичної енергії системи і робіт активних сил. Ця обставина дозволяє використовувати метод Лагранжа для аналізу не тільки механічних, а також інших фізичних систем.

4. Рівняння (2.30) не містять реакцій ідеальних в'язей. Це дозволяє відділити задачу встановлення руху невідомої системи від задачі визначення невідомих реакцій в'язей.

**Зауваження.** Для систем з утримуючими й ідеальними в'язями рівняння Лагранжа другого роду повністю розв'язують задачу про визначення закону її руху. Для систем з неутримуючими або неідеальними в'язями рівнянь (2.30) може бути недостатньо, що потребує складання додаткових рівнянь [3].

## 2.5. Рівняння Лагранжа другого роду для консервативних систем

Якщо всі активні сили, що діють на механічну систему, є консервативними, то рівняння (2.30) з урахуванням (2.12) набудуть вигляду

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad (j = 1, \dots, s). \quad (2.31)$$

Оскільки потенціальна енергія системи  $\Pi = \Pi(q_1, \dots, q_s)$  є функцією лише узагальнених координат і від узагальнених швидкостей не залежить, то її частинні похідні за узагальненими швидкостями дорівнюють нулю:  $\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_j} = 0$ .

Тоді рівняння (2.31) можна записати у вигляді

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(T-\Pi)}{\partial\dot{q}_j}\right) - \frac{\partial(T-\Pi)}{\partial q_j} = 0, \quad (j=1,\dots,s). \quad (2.32)$$

Введемо у розгляд функцію  $L = T - \Pi$ . Функція  $L$  від узагальнених координат і швидкостей, яка дорівнює різниці між кінетичною і потенціальною енергіями, називається **функцією Лагранжа**, або **кінетичним потенціалом** системи. У цьому разі система рівнянь (2.32) набуде вигляду

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (j=1,\dots,s). \quad (2.33)$$

Рівняння (2.33) називаються **рівняннями Лагранжа другого роду для консервативних систем**. З рівнянь (2.33) випливає, що рух консервативної системи визначається заданням тільки однієї функції – функції Лагранжа  $L$ .

Зауважимо, що саме форма (2.33) рівнянь Лагранжа використовується в різних розділах теоретичної фізики і ряді прикладних наук (гідродинаміці, теорії пружності, електротехніці, радіотехніці тощо).

## 2.6. Методика розв'язання задач динаміки з використанням рівнянь Лагранжа другого роду

При застосуванні рівнянь Лагранжа другого роду треба дотримуватися наступної послідовності дій.

1. Зобразити механічну систему в довільному положенні під час її руху, визначити число степенів її вільності, вибрати узагальнені координати й записати рівняння Лагранжа (2.30).
2. Зобразити активні сили й реакції неідеальних в'язей.
3. Визначити кінетичну енергію системи. При цьому всі лінійні й кутові швидкості виразити через узагальнені швидкості, використовуючи співвідношення кінематики.
4. Визначити узагальнені сили за одним із способів, наведених у § 2.2.

5. Обчислити похідні кінетичної енергії  $\frac{\partial T}{\partial q_j}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$ ,  $\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j})$  і скласти

рівняння Лагранжа (2.30), тобто диференціальні рівняння руху системи.

6. Визначити шукані параметри. При цьому якщо для розв'язання задачі потрібно знайти рівняння руху системи, отримані диференціальні рівняння необхідно зінтегрувати з урахуванням початкових умов руху.

**Приклад 5.** Скласти диференціальне рівняння коливань математичного маятника (рис. 2.4) за допомогою рівняння Лагранжа другого роду.

### Розв'язання

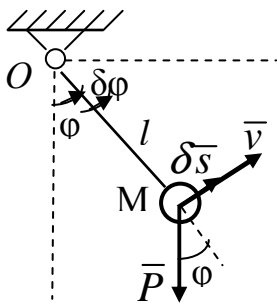


Рис. 2.4

1. Зобразимо систему, що складається з ідеального стержня ОМ і матеріальної точки М, в довільному положенні при коливаннях у вертикальній площині. Система має один степінь вільності і за узагальнену координату  $q$  приймемо кут відхилення стержня ОМ від вертикалі  $q = \varphi$ .

Рівняння Лагранжа (2.30) з урахуванням вибраної узагальненої координати набуде вигляду

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}.$$

2. На матеріальну точку М діє тільки сила ваги  $\bar{P} = m\bar{g}$ .

3. Визначимо кінетичну енергію математичного маятника:  $T = \frac{mv^2}{2}$ .

Лінійну швидкість  $v$  виразимо через узагальнену швидкість  $\dot{\varphi} = \omega$  (кутову швидкість обертання стержня ОМ):  $v = \omega \cdot l = \dot{\varphi} \cdot l$ . Тоді отримаємо

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m \cdot (\dot{\varphi} \cdot l)^2}{2} = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2.$$

4. Узагальнена сила, що відповідає узагальненій координаті  $\varphi$ , знайдена для математичного маятника у прикладі 4 § 2.2. Проте,

продемонструємо ще один варіант застосування способу 2 § 2.2, що базується на визначенні можливої роботи сили ваги  $\bar{P}$  за формулою (1.8):

$$\delta A_p = \bar{P} \cdot \delta \bar{s} = P \cdot \delta s \cdot \cos(90 + \varphi),$$

де можливе переміщення  $\delta s$  точки М (точки прикладення сили ваги) має бути виражене через можливий кут повороту стержня  $\delta \varphi$ . Для систем із стаціонарними в'язями можливі переміщення пропорційні відповідним швидкостям, отже маємо  $\delta s = \delta \varphi \cdot l$ . Тоді вираз можливої роботи з урахуванням формули зведення тригонометричних функцій  $\cos(90 + \varphi) = -\sin \varphi$  набере вигляду

$$\delta A_p = -mgl \sin \varphi \cdot \delta \varphi,$$

звідки узагальнена сила буде

$$Q_\varphi = -mgl \cdot \sin \varphi.$$

5. Обчислимо похідні кінетичної енергії:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 \quad (\text{оскільки узагальнена координата } \varphi \text{ явно не входить до}$$

кінетичної енергії  $T$ );

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{2} ml^2 \cdot 2\dot{\varphi} = ml^2 \dot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = ml^2 \ddot{\varphi}.$$

Складемо рівняння Лагранжа другого роду:

$$ml^2 \ddot{\varphi} - 0 = -mgl \cdot \sin \varphi$$

або

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cdot \sin \varphi = 0.$$

Отримане рівняння є диференціальним рівнянням руху (коливань) математичного маятника. Зазначимо, що це рівняння є нелінійним. У разі малих коливань, коли  $\sin \varphi \approx \varphi$ , останнє рівняння набуде вигляду

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cdot \varphi = 0.$$



## II. МАЛІ КОЛИВАННЯ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ ЗІ СКІНЧЕННИМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНІВ ВІЛЬНОСТІ

Одними з найважливіших для дослідження поведінки будівельних конструкцій і їх елементів при дії динамічних навантажень є теорії стійкості положень рівноваги і малих коливань механічних систем навколо цих положень, які застосовують методи аналітичної механіки. Малі коливання описуються лінійними диференціальними рівняннями з постійними коефіцієнтами, що дає змогу називати ці коливання *лінійними*.

### 3. Малі коливання механічної системи навколо положення її стійкої рівноваги

Для вивчення коливань навколо положення рівноваги слід передусім знайти ті положення, в яких система може знаходитись у стані рівноваги.

#### 3.1. Визначення положень рівноваги

Розглянемо механічну систему з ідеальними, стаціонарними й голономними в'язями, положення якої визначається за допомогою  $s$  узагальнених координат  $q_1, \dots, q_s$ . Згідно з (2.14), в положенні рівноваги всі узагальнені сили дорівнюють нулю:

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad \dots, \quad Q_s = 0. \quad (3.1)$$

Для консервативної системи ці рівності приймають вигляд (2.15):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} = 0. \quad (3.2)$$

Якщо узагальнені сили залежать тільки від узагальнених координат, то рівності (3.1) або (3.2) можна розглядати як рівняння відносно  $q_1, \dots, q_s$ . Розв'язуючи ці рівняння, знаходимо ті положення (тобто значення параметрів  $q_1, \dots, q_s$ ), в яких система може знаходитись у стані рівноваги.

Якщо узагальнені сили залежать ще й від узагальнених швидкостей, то при знаходженні розв'язку рівнянь (3.1) всі узагальнені швидкості слід прирівняти до нуля.

**Приклад 1.** Визначити можливі положення рівноваги математичного маятника (рис. 2.3, § 2.2).

Потенціальна енергія маятника знайдена у прикладі 4 § 2.2:

$$\Pi = \Pi_p = mg(z - z_0) = mgl \cdot (1 - \cos \varphi) .$$

Складемо рівняння (3.2):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = mgl \cdot \sin \varphi = 0 , \text{ або } \sin \varphi = 0 .$$

Це рівняння має два корені:  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = \pi$  . Кореню  $\varphi_1 = 0$  відповідає нижнє вертикальне положення маятника (рис. 3.1, а), кореню  $\varphi_2 = \pi$  - верхнє вертикальне положення (рис. 3.1, б).

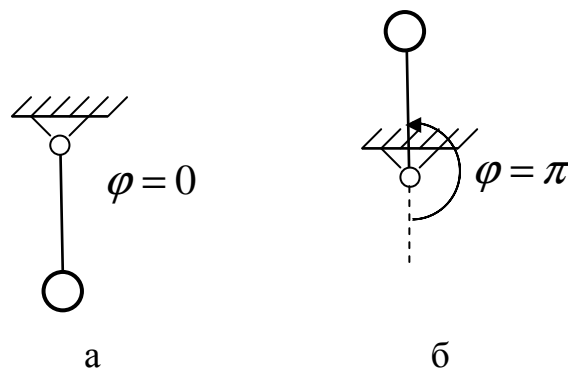


Рис. 3.1

### 3.2. Стійкість положення рівноваги

Після визначення положень рівноваги механічної системи слід проаналізувати, які з цих положень практично реалізуються, тобто які положення є стійкими, а які нестійкими. Обмежимося розглядом поняття стійкості рівноваги за Ляпуновим.

Розглянемо механічну систему, положення якої визначається за допомогою  $s$  узагальнених координат  $q_1, \dots, q_s$  . Не порушуючи загальності,

будемо вважати, що в розглядуваному положенні рівноваги всі узагальнені координати дорівнюють нулю:  $q_1 = \dots = q_s = 0$ , для цього достатньо вести їх відлік від положення рівноваги. Виведемо систему зі стану рівноваги, для чого надамо в початковий момент часу  $t_0 = 0$  невеликі за модулем значення узагальненим координатам і їх швидкостям

$$q_{01}, \dots, q_{0s}; \quad \dot{q}_{01}, \dots, \dot{q}_{0s},$$

які мають назву **збурення**. Позначимо функції узагальнених координат і їх швидкостей при подальшому, **збуреному русі** системи як

$$q_1(t), \dots, q_s(t); \quad \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_s(t).$$

Положення рівноваги називають **стійким**, якщо для будь-яких як завгодно малих додатних чисел  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s$ ,  $\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_s$  можна знайти інші додатні числа  $\delta_1, \dots, \delta_s$ ,  $\delta'_1, \dots, \delta'_s$  такі, що для всіх збурень, які відповідають умовам

$$|q_{01}| \leq \delta_1, \dots, |q_{0s}| \leq \delta_s, \quad |\dot{q}_{01}| \leq \delta'_1, \dots, |\dot{q}_{0s}| \leq \delta'_s,$$

для будь-якого моменту часу  $t \geq t_0$  виконуються нерівності

$$|q_1(t)| \leq \varepsilon_1, \dots, |q_s(t)| \leq \varepsilon_s, \quad |\dot{q}_1(t)| \leq \varepsilon'_1, \dots, |\dot{q}_s(t)| \leq \varepsilon'_s.$$

В іншому разі положення рівноваги називають **нестійким**.

Якщо у збуреному русі всі узагальнені координати і їх швидкості з часом наближаються до нуля

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_k(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}_k(t) = 0, \quad (k = 1, \dots, s)$$

то положення рівноваги називається **асимптотично стійким**.

Сформульоване визначення називають визначенням стійкості рівноваги за Ляпуновим, або *математичним* визначенням. Наведемо ще одне, *фізичне* визначення стійкості положення рівноваги.

Для простоти розглянемо консервативну систему з одним ступенем вільності. Уявимо рух системи у **фазовій площині**, координатами якої будуть  $q, \dot{q}$ . Кожному стану системи на фазовій площині відповідає одна точка, яка

називається **зображальною**. У разі зміни фазових координат  $q, \dot{q}$  з часом зображальна точка переміщується по фазовій площині. Траєкторію зображальної точки називають **фазовою траєкторією**. Можна показати, що при вільних коливаннях консервативної системи зображальна точка рухається на фазовій площині по еліпсу з центром у початку координат, параметри (розміри) якого однозначно визначаються початковими умовами (рис. 3.2). Положенню рівноваги відповідає початок координат О.

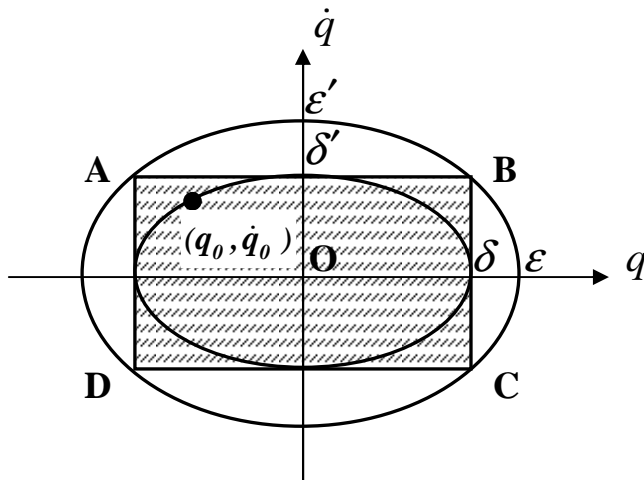


Рис. 3.2.

З властивості фазових траєкторій випливає, що коли початкове положення (збурення) зображальної точки  $(q_0, \dot{q}_0)$  буде знаходитись в межах прямокутника ABCD, тобто будуть виконуватися умови  $|q_0| \leq \delta, |\dot{q}_0| \leq \delta'$ , то фазова траєкторія

зображальної точки не вийде за межі еліпса з напівосьми  $\epsilon, \epsilon'$ , що означає виконання нерівностей  $|q(t)| \leq \epsilon, \dots, |\dot{q}(t)| \leq \epsilon'$ .

Таким чином, якщо при малому збуренні механічної системи з положення рівноваги вона здійснює малі незатухаючі коливання навколо нього, то таке положення рівноваги називається **стійким**. Якщо система здійснює малі затухаючі коливання (при цьому зображальна точка рухається на фазовій площині по спіралі до початку координат О), то таке положення рівноваги називається **асимптотично стійким** (рис. 3.3).

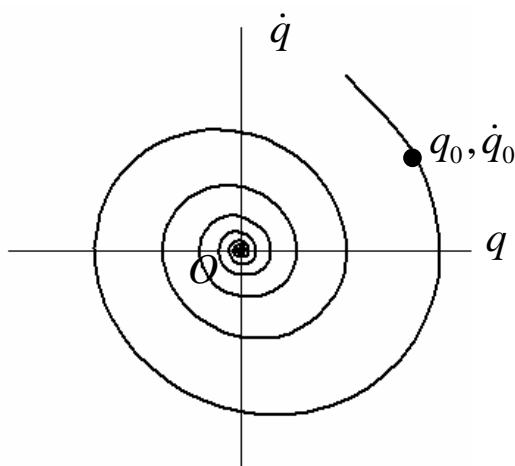


Рис.3.3

### 3.3. Визначення стійкості положення рівноваги консервативної системи.

#### Теорема Лагранжа - Діріхле. Критерій Сільвестра

Достатні умови стійкості рівноваги консервативної системи визначаються *теоремою Лагранжа – Діріхле*: якщо в положенні рівноваги консервативної системи з голономними, ідеальними й стаціонарними в'язями потенціальна енергія має ізольований мінімум, то таке положенням рівноваги є стійким.

Доведення цієї теореми можна отримати як наслідок теореми Ляпунова про стійкість руху, що розглядається в посібниках з теорії стійкості руху.

З теореми випливає, що для визначення стійкості положення рівноваги консервативної системи достатньо з'ясувати, чи має потенціальна енергія в цьому положенні мінімум. Розглянемо два випадки.

1. Визначення стійкості положення рівноваги консервативної системи з одним степенем вільності.

З курсу математики відомо, що для функції однієї змінної питання максимуму чи мінімуму в точці екстремуму (точці, де перша похідна цієї функції дорівнює нулю) вирішується на підставі знака значення другої похідної функції у зазначеній точці. Якщо знак є додатним, функція в точці екстремуму має мінімум. Таким чином, положення рівноваги консервативної

системи з одним степенем вільності буде стійким, якщо друга похідна потенціальної енергії за узагальненою координатою, що обчислена в положенні рівноваги, є додатною:

$$\left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \right)_{q=0} > 0. \quad (3.3)$$

2. *Визначення стійкості положення рівноваги консервативної системи зі скінченним числом степенів вільності.*

У цьому разі критерій мінімуму потенціальної енергії, яка буде функцією скінченного числа змінних, має більш складний вигляд.

Розглянемо одне з положень рівноваги консервативної системи з  $s$  степенями вільності. Не порушуючи загальності, вважатимемо, що в цьому положенні потенціальна енергія дорівнює нулю

$$\Pi(0, 0, \dots, 0) = 0 \quad (3.4)$$

(це можна зробити, оскільки потенціальна енергія визначається з точністю до сталої величини). Будемо розглядати малі зміщення системи з положення рівноваги, тоді узагальнені координати  $q_j$  можна розглядати як величини першого порядку мализни. Розкладемо вираз потенціальної енергії, яка є функцією узагальнених координат  $\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_s)$ , в ряд Маклорена за степенями узагальнених координат:

$$\Pi(q_1, q_2, \dots, q_s) = \Pi(0, 0, \dots, 0) + \sum_{j=1}^s \left( \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \right)_0 q_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 q_i q_j + \dots, \quad (3.5)$$

де точками в кінці позначені доданки більш високого порядку мализни, ніж другий. Перші два доданки у виразі (3.5) дорівнюють нулю в силу співвідношень (3.2) і (3.4). Тоді з точністю до доданків другого порядку мализни відносно узагальнених координат потенціальна енергія набуде вигляду

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 q_i q_j. \quad (3.6)$$

Позначимо коефіцієнти при других степенях узагальнених координат через  $c_{ij}$ :

$$c_{ij} = \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0, \quad i, j = 1, 2, \dots, s. \quad (3.7)$$

Коефіцієнти  $c_{ij}$  називаються *узагальненими коефіцієнтами жорсткості*. Вони є *сталими* (визначаються в положенні рівноваги) і *симетричними* ( $c_{ij} = c_{ji}$ ) величинами. Тоді вираз для потенціальної енергії (3.6) прийме вигляд

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s c_{ij} q_i q_j. \quad (3.8)$$

Отже, при малих відхиленнях консервативної системи від положення рівноваги її потенціальна енергія є *однорідною квадратичною формою* (функцією) узагальнених координат.

Якщо квадратична форма (3.8) буде додатно-визначеною (додатною при всіх значеннях узагальнених координат, якщо вони всі не дорівнюють одночасно нулю), то потенціальна енергія в положенні рівноваги (де  $\Pi(0, 0, \dots, 0) = 0$ ) матиме мінімум, тобто це положення рівноваги буде стійким. Питання про знак квадратичної форми визначається **теоремою Сільвестра**: для того щоб квадратична форма була додатно-визначеною, необхідно і достатньо, щоб усі головні діагональні мінори матриці квадратичної форми були додатні. Доведення цієї теореми можна знайти в курсах лінійної алгебри.

Матриця квадратичної форми і її головні діагональні мінори мають вигляд

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{s1} & c_{s2} & \dots & c_{ss} \end{bmatrix},$$

$$\Delta_1 = c_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_s = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{s1} & c_{s2} & \dots & c_{ss} \end{vmatrix}. \quad (3.9)$$

Таким чином, *положення рівноваги консервативної системи з  $s$  степенями вільності буде стійким, якщо виконуються умови:*

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_s > 0. \quad (3.10)$$

З умови (3.10) випливає послідовність дій при застосуванні теореми Лагранжа – Діріхле для консервативної системи з  $s$  степенями вільності: потрібно розкласти потенціальну енергію в ряд за степенями узагальнених координат в околі положення рівноваги, утримуючи доданки не вищі, ніж другого порядку мализни, визначити узагальнені коефіцієнти жорсткості  $c_{ij}$  і скласти визначники (3.9). Якщо для усіх визначників виконуються умови (3.10), то розглядуване положення рівноваги є стійким.

**Зауваження 1.** Теорема Лагранжа – Діріхле дає тільки достатні умови стійкості положення рівноваги консервативної системи. На основі цієї теореми не можна стверджувати, що відсутність мінімуму потенціальної енергії в положенні рівноваги означає нестійкість стану рівноваги. Також не можна стверджувати, що положенню стійкої рівноваги завжди відповідає мінімум потенціальної енергії.

**Зауваження 2.** У тих випадках, коли деякі узагальнені координати не входять явно у вираз потенціальної енергії, положення рівноваги системи відносно цих координат називають *байдужим*. Прикладом може служити положення рівноваги кулі на горизонтальній поверхні.



**Зауваження 3.** Питання про нестійкість положення рівноваги ґрунтується на теоремах Ляпунова. Одна з **теорем Ляпунова** формулюється наступним чином: *рівновага консервативної системи нестійка, якщо відсутність мінімуму потенціальної енергії визначається членами другого порядку мализни в її розкладі в ряд за степенями узагальнених координат.* Для цього потенціальна енергія має бути представленою формулою (3.8).

**Приклад 2.** Визначити стійкість положень рівноваги математичного маятника, які були визначені у прикладі 1 § 3.1 (рис. 3.1).

### **Розв'язання**

Обчислимо другу похідну потенціальної енергії за узагальненою координатою  $\varphi$  :

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = mgl \cdot \cos \varphi .$$

З'ясуємо далі знак другої похідної у відповідних положеннях рівноваги:

1). При  $\varphi_1 = 0$  значення  $\cos \varphi_1 = 1$  і  $\left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} \right)_{\varphi_1=0} = mgl > 0$ , тобто нижнє

положення рівноваги математичного маятника є стійким.

2). При  $\varphi_2 = \pi$  значення  $\cos \varphi_2 = -1$  і  $\left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} \right)_{\varphi_2=\pi} = -mgl < 0$ , отже

верхнє положення рівноваги математичного маятника є нестійким.

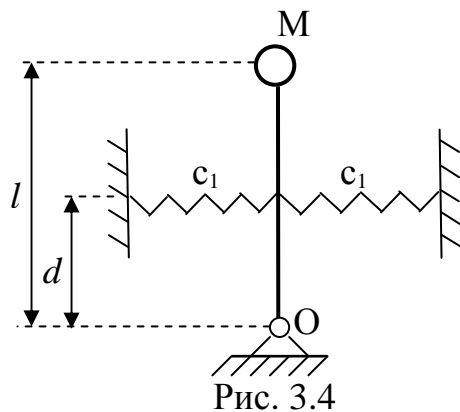


Рис. 3.4

**Приклад 3.** Визначити умови стійкості положення рівноваги астатичного маятника (рис. 3.4), що складається з жорсткого невагомго стержня довжиною  $l$ , що несе на кінці точковий вантаж **М** масою  $m$ . До стержня прикріплені дві пружини однакової жорсткості  $c_1$  на відстані  $d$  від його нижнього кінця.

### Розв'язання

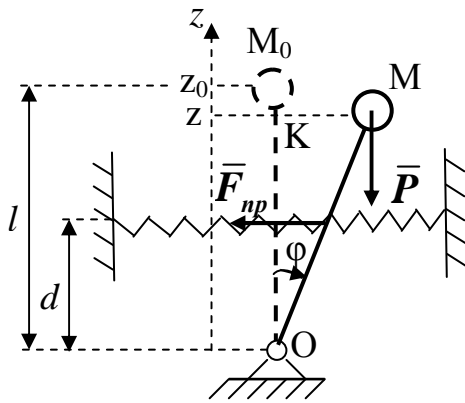


Рис. 3.5

1. Будемо визначати положення маятника за допомогою кута відхилення стержня OM від вертикалі -  $\varphi$ . Система має один степінь вільності і за узагальнену координату  $q$  приймемо кут повороту стержня:  $q = \varphi$ . Зобразимо маятник у довільному положенні при його коливаннях (рис. 3.5). На точковий

вантаж **M** діє сила ваги  $\bar{P} = m\bar{g}$ , на стержень OM – сила пружності  $\bar{F}_{np}$ , що складається з сил пружності двох пружин, які напрямлені до положення рівноваги стержня (у цьому положенні пружини недеформовані). Таким чином, діючі на маятник сили є консервативними.

2. Визначимо потенціальну енергію системи, що складається з потенціальних енергій сили ваги і двох сил пружності, використовуючи формули (2.9), (2.10), (2.11). За нульове приймемо положення маятника у стані спокою  $OM_0$ . Для визначення потенціальної енергії сили ваги врахуємо, що різниця висот між розглядуваним **M** та нульовим  $M_0$  положеннями дорівнює

$$z - z_0 = OK - OM_0 = l \cdot \cos \varphi - l = l \cdot (\cos \varphi - 1) .$$

Тоді

$$\Pi_p = mg(z - z_0) = mgl \cdot (\cos \varphi - 1) .$$

Розкладемо функцію  $\cos \varphi$  в ряд Маклорена і утримуємо доданки порядку мализни не вищого, ніж другий:

$$\cos \varphi \approx 1 - \frac{1}{2} \varphi^2 .$$

Отже,

$$\Pi_p = mgl \cdot (\cos \varphi - 1) \approx mgl \cdot (1 - \frac{1}{2} \varphi^2 - 1) = -mgl \cdot \frac{\varphi^2}{2} .$$

Для визначення потенціальної енергії сил пружності врахуємо, що деформація кожної пружини в нульовому положенні дорівнює  $\lambda_0 = 0$ , а у довільному положенні при малому куті повороту  $\varphi$ :  $\lambda \approx d \cdot \operatorname{tg} \varphi$ . Тоді

$$\Pi_{F_{np}} = 2 \cdot \frac{c_1}{2} (\lambda^2 - \lambda_0^2) \approx 2 \cdot \frac{c_1}{2} (d^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi - 0) = c_1 \cdot d^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi.$$

Розкладемо функцію  $\operatorname{tg} \varphi$  в ряд Маклорена і утримуємо доданки порядку мализни не вищого, ніж другий:

$$\operatorname{tg} \varphi \approx \varphi.$$

Отже,

$$\Pi_{F_{np}} = c_1 \cdot d^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi \approx c_1 d^2 \varphi^2.$$

Таким чином, потенціальна енергія системи при малих відхиленнях від положення рівноваги  $\varphi = 0$  дорівнює

$$\Pi = \Pi_p + \Pi_{F_{np}} = -mgl \frac{\varphi^2}{2} + c_1 d^2 \varphi^2 = \frac{1}{2} (-mgl + 2c_1 d^2) \varphi^2.$$

3. Сформуємо критерій стійкості рівноваги (3.3):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} (-mgl + 2c_1 d^2) \cdot 2\varphi = (-mgl + 2c_1 d^2) \cdot \varphi,$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = -mgl + 2c_1 d^2.$$

Згідно з теоремою Лагранжа-Діріхле вертикальне положення рівноваги буде стійким, якщо

$$\left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} \right)_{\varphi=0} = -mgl + 2c_1 d^2 > 0, \quad \text{або} \quad d^2 > \frac{mgl}{2c_1}.$$

**Відповідь.** Вертикальне положення рівноваги астатичного маятника буде стійким, якщо відстань закріплення пружин від нижнього кінця стержня задовольняє нерівності  $d^2 > \frac{mgl}{2c_1}$ . В іншому випадку положення рівноваги

буде нестійким.

**Зауваження 4.** З порівняння прикладів 2 і 3 випливає, що при визначенні усієї сукупності можливих положень рівноваги і їх стійкості потенціальну енергію консервативної системи не слід розкладати в ряд Маклорена, оскільки розкладання в ряд відбувається в околі певного положення рівноваги. **Зауваження 5.** Визначення потенціальної енергії консервативної системи в околі положення рівноваги і застосування теореми Лагранжа - Діріхле є одним з методів розрахунку стійкості положення рівноваги цієї системи («енергетичний» метод розрахунку стійкості).

### 3.4. Вираження кінетичної енергії системи через узагальнені координати й швидкості

Розглянемо механічну систему, що складається з  $N$  матеріальних точок, з голономними і стаціонарними в'язями, що має  $s$  степенів вільності. Положення точок системи визначаються їх радіусами-векторами, які для розглядуваних в'язей залежать тільки від узагальнених координат:

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, \dots, q_s), \quad (k = 1, \dots, N). \quad (3.11)$$

Похідна за часом від виразу (3.11) визначає швидкість  $k$ -ї точки:

$$\bar{v}_k = \dot{\bar{r}}_k = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j, \quad (k = 1, \dots, N). \quad (3.12)$$

Квадрат швидкості  $k$ -ї точки з урахуванням (3.12) матиме вигляд

$$v_k^2 = \bar{v}_k \cdot \bar{v}_k = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (k = 1, \dots, N). \quad (3.13)$$

Складемо вираз кінетичної енергії системи в її русі:

$$T = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k v_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j.$$

Змінимо порядок підсумування:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \left( \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (3.14)$$

Позначимо коефіцієнти при других степенях узагальнених швидкостей через  $a_{ij}$ :

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, s. \quad (3.15)$$

Коефіцієнти  $a_{ij}$  називаються *узагальненими коефіцієнтами інерції*. Вони *залежать тільки від узагальнених координат* (від узагальнених швидкостей не залежать) і є *симетричними* ( $a_{ij} = a_{ji}$ ) величинами. Тоді вираз для кінетичної енергії (3.14) прийме вигляд

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (3.16)$$

Отже, при русі механічної системи з голономними й стаціонарними в'язями її кінетична енергія є *однорідною квадратичною формою* (функцією) узагальнених швидкостей. Ця *форма є додатно-визначеною*, оскільки при русі системи її кінетична енергія завжди додатна  $T \geq 0$ .

**Зауваження.** При отриманні виразу (3.16) не використовувалось припущення про мализну узагальнених координат і швидкостей.

### 3.5. Малі коливання консервативної системи з одним степенем вільності навколо положення стійкої рівноваги

Розглянемо консервативну систему з голономними й стаціонарними в'язями, яка має один степінь вільності. При збуреному русі навколо положення стійкої рівноваги узагальнена координата  $q$ , що визначає положення системи, і узагальнена швидкість  $\dot{q}$  будуть малими за модулями величинами. Це дає змогу застосувати приблизний метод дослідження руху, при якому первісні нелінійні в загальному випадку диференціальні рівняння руху спрощуються і замінюються на лінійні рівняння. Для цього достатньо розкласти вирази для кінетичної і потенціальної енергій у ряди за степенями  $q$  і  $\dot{q}$ , обмежившись членами другого порядку мализни.

Визначимо кінетичну енергію. Згідно з виразом (3.16) кінетична енергія для системи з одним степенем вільності має вигляд

$$T = \frac{1}{2} a_{11}(q) \cdot \dot{q}^2, \quad (3.17)$$

де  $a_{11}(q)$  - узагальнений коефіцієнт інерції, який у загальному випадку залежить від узагальненої координати. Розкладемо  $a_{11}(q)$  в ряд Маклорена за степенями  $q$ :

$$a_{11}(q) = a_{11}(0) + \left( \frac{da_{11}}{dq} \right)_0 q + \dots \quad (3.18)$$

Підставимо (3.18) у (3.17) і збережімо доданки не вищі за другий порядок мализни:

$$T = \frac{1}{2} \left[ a_{11}(0) + \left( \frac{da_{11}}{dq} \right)_0 q + \dots \right] \cdot \dot{q}^2 \approx \frac{1}{2} a_{11}(0) \dot{q}^2.$$

Позначимо  $a = a_{11}(0)$ , тоді кінетична енергія набуде вигляду

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2. \quad (3.19)$$

Таким чином, приблизний вираз кінетичної енергії (3.19) відрізняється від точного (3.17) тим, що узагальнений коефіцієнт інерції  $a_{11}(q)$  замінюється на його значення  $a = a_{11}(0)$  в положенні рівноваги. При цьому  $a = \text{const} > 0$ , оскільки кінетична енергія  $T$  завжди додатна при  $\dot{q} \neq 0$ .

Визначимо далі потенціальну енергію. Згідно з виразом (3.8) потенціальна енергія для системи з одним степенем вільності з прийнятою точністю має вигляд

$$\Pi = \frac{1}{2} c_{11} q^2 = \frac{1}{2} c q^2, \quad (3.20)$$

при цьому узагальнений коефіцієнт жорсткості є додатним  $c = \text{const} > 0$ , оскільки положення рівноваги стійке.

Складемо диференціальне рівняння руху. Для цього скористаємось рівнянням Лагранжа (2.31). Обчислимо частинні похідні

$$\frac{\partial T}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a\dot{q}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) = a\ddot{q}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q} = cq$$

і підставимо їх у рівняння (2.31). Тоді рівняння Лагранжа набуде вигляду

$$a\ddot{q} = -cq.$$

Перетворимо отримане рівняння, для чого:

- функцію  $q$  і її похідні за часом перенесемо в ліву частину рівняння

$$a\ddot{q} + cq = 0;$$

- коефіцієнт перед вищою похідною зробимо рівним одиниці (поділимо всі доданки на узагальнений коефіцієнт інерції  $a$ )

$$\ddot{q} + \frac{c}{a}q = 0;$$

- коефіцієнт перед функцією  $q$  позначимо

$$\omega_0^2 = \frac{c}{a}. \quad (3.21)$$

Тоді **диференціальне рівняння малих коливань консервативної системи навколо положення стійкої рівноваги** набуде вигляду

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (3.22)$$

Таким чином, рух консервативної системи описується лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Визначимо тепер розв'язок диференціального рівняння. Оскільки рівняння (3.22) збігається з диференціальним рівнянням вільних коливань матеріальної точки, його розв'язок можна подати у формі

$$q = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t, \quad (3.23)$$

де  $C_1, C_2$  - сталі інтегрування, що визначаються за допомогою початкових умов.

Для визначення сталих інтегрування потрібно мати вираз узагальненої швидкості. Диференціюючи (3.23) за часом, отримаємо

$$\dot{q} = -C_1 \omega_0 \sin \omega_0 t + C_2 \omega_0 \cos \omega_0 t. \quad (3.24)$$

У загальному випадку початкові умови мають вигляд:  $q|_{t=0} = q_0, \dot{q}|_{t=0} = \dot{q}_0$ .

Підставляючи початкові умови в (3.23), (3.24), отримаємо систему алгебраїчних рівнянь відносно сталих інтегрування  $C_1, C_2$ :

$$\begin{cases} q_0 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0, \\ \dot{q}_0 = -C_1 \omega_0 \sin 0 + C_2 \omega_0 \cos 0. \end{cases}$$

З урахуванням значень тригонометричних функцій  $\cos 0 = 1, \sin 0 = 0$  сталі інтегрування будуть

$$C_1 = q_0, \quad C_2 = \frac{\dot{q}_0}{\omega_0}.$$

Підставляючи сталі інтегрування у вираз (3.23), отримаємо

$$q = q_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{q}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (3.24)$$

Рівняння (3.24) є **рівнянням вільних**, або **власних, коливань консервативної системи** навколо положення її стійкої рівноваги.

Це рівняння можна записати в іншій, еквівалентній формі:

$$q = A \sin(\omega_0 t + \varepsilon), \quad (3.25)$$

де параметри  $A, \varepsilon$  пов'язані зі сталими інтегрування  $C_1, C_2$ , а значить і з початковими умовами співвідношеннями

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{q_0^2 + \frac{\dot{q}_0^2}{\omega_0^2}}, \quad \varepsilon = \arctg\left(\frac{C_1}{C_2}\right) = \arctg\left(\frac{q_0 \omega_0}{\dot{q}_0}\right), \quad (3.26)$$

З формули (3.26) видно, що параметр  $A$  є **амплітудою коливань** (найбільшим відхиленням узагальненої координати від положення



рівноваги), аргумент  $\omega_0 t + \varepsilon$  - *фазою коливань*, величина  $\varepsilon$  - *початковою фазою*, величина  $\omega_0$  - *коловою (власною) частотою коливань* (визначає число коливань за проміжок часу  $2\pi$  секунд і вимірюється у  $\text{рад/с}$  (або  $1/\text{с}$ )), яка пов'язана з *періодом* (проміжком часу, протягом якого відбувається повне коливання) формулою

$$T_{\text{період}} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{c}}. \quad (3.27)$$

Проаналізуємо *властивості вільних коливань*:

- 1). Коливання механічної системи під дією консервативних сил навколо положення стійкої рівноваги, враховуючи (3.24) або (3.25), є незатухаючими гармонійними коливаннями.
- 2). Власна частота  $\omega_0$  і період  $T_{\text{період}}$  від початкових умов не залежать, а визначаються тільки параметрами системи – узагальненими коефіцієнтами жорсткості  $c$  і інерції  $a$  (див. формули (3.21), (3.27)).
- 3). Амплітуда  $A$  і початкова фаза коливань  $\varepsilon$  залежать від початкових умов  $q_0, \dot{q}_0$  (формули (3.26)).

Графік залежності узагальненої координати від часу при вільних коливаннях наведений на рис. 3.6.

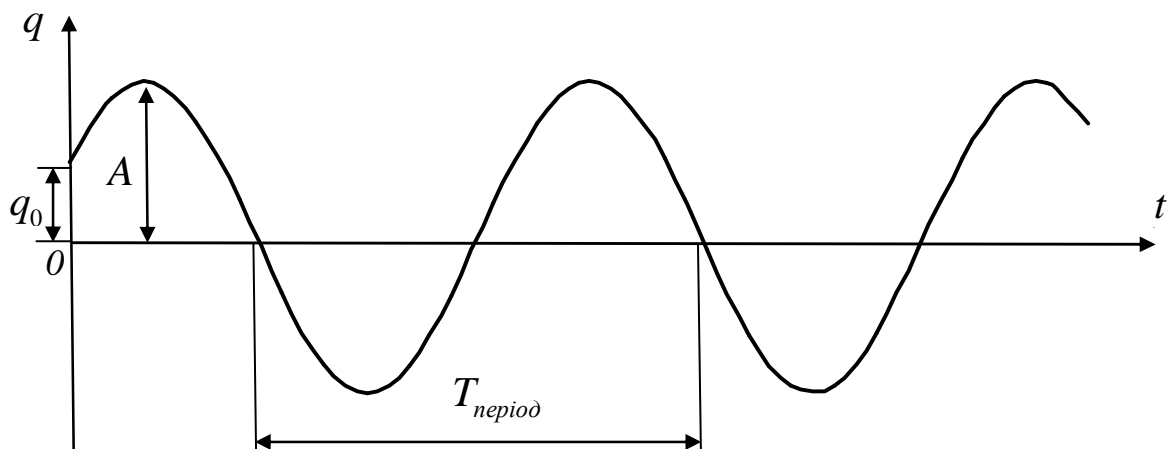


Рис. 3.6

На *фазовій площині* при вільних коливаннях консервативної системи зображальна точка рухається по *еліпсу* з центром у початку координат, параметри (розміри) якого однозначно визначаються початковими умовами (рис. 3.7). Положенню рівноваги відповідає початок координат  $O$ . При русі системи жодна фазова траєкторія не перетинає точку  $O$ , яка має назву особливої точки типу «*центр*».

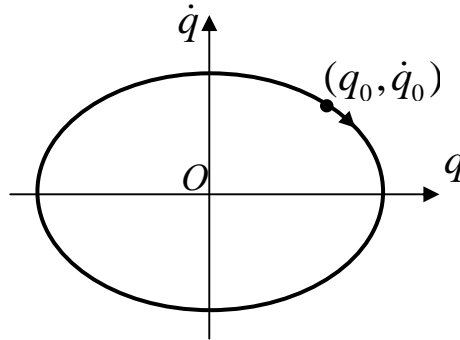


Рис. 3.7.

**Приклад 4.** Визначити період малих коливань астатичного маятника (див. приклад 3 §3.3, рис. 3.4, 3.5).

#### ***Розв'язання***

Період малих коливань консервативної системи з одним степенем вільності можна визначити за формулою (3.27), якщо будуть відомі узагальнені коефіцієнти жорсткості  $c$  і інерції  $a$ . Для визначення узагальнених коефіцієнтів можна скласти вирази потенціальної і кінетичної енергії системи в довільному положенні і порівняти їх із загальними формулами (3.19) і (3.20).

Знайдемо узагальнений коефіцієнт жорсткості  $c$ . Потенціальна енергія астатичного маятника була визначена у п. 1, 2 прикладу 3 §3.3:

$$\Pi = \frac{1}{2}(-mgl + 2c_1 d^2)\phi^2.$$

Порівнюючи цей вираз з формулою (3.20), знаходимо узагальнений коефіцієнт жорсткості як множник між числовим коефіцієнтом  $\frac{1}{2}$  і квадратом узагальненої координати  $\varphi^2$ :

$$c = -mgl + 2c_1 d^2.$$

Визначимо узагальнений коефіцієнт жорсткості  $a$ . Для цього складемо вираз кінетичної енергії маятника у довільному положенні. Вона визначається як кінетична енергія точкового вантажу  $M$ :  $T = \frac{mv^2}{2}$ . Лінійну швидкість  $v$  виразимо через узагальнену швидкість  $\dot{\varphi} = \omega$ , що є кутовою швидкістю обертання стержня **ОМ** навколо осі, яка проходить через точку **О**:  $v = \omega \cdot l = \dot{\varphi} \cdot l$ . Тоді кінетична енергія системи буде

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m \cdot (\dot{\varphi} \cdot l)^2}{2} = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2.$$

Порівнюючи цей вираз з формулою (3.19), знаходимо узагальнений коефіцієнт інерції як множник між числовим коефіцієнтом  $\frac{1}{2}$  і квадратом узагальненої швидкості  $\dot{\varphi}^2$ , обчислений при малих коливаннях у положенні рівноваги  $\varphi = 0$ :

$$a = (ml^2)_{\varphi=0} = ml^2.$$

Визначимо період малих коливань за формулою (3.27):

$$T_{\text{період}} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{c}} = 2\pi \sqrt{\frac{ml^2}{-mgl + 2c_1 d^2}}.$$

**Відповідь.**  $T_{\text{період}} = 2\pi \sqrt{\frac{ml^2}{-mgl + 2c_1 d^2}}$ . З цієї формули випливає, що при рівності нулю знаменника  $2c_1 d^2 - mgl = 0$  період приймає нескінченне

значення, що відповідає втраті стійкості положення рівноваги астатичного маятника (система «ніколи не повернеться» у початкове положення).

**Зауваження.** Пошук умови, за якої період малих коливань консервативної системи навколо положення рівноваги стає нескінченним, є одним з методів розрахунку стійкості положення рівноваги цієї системи («динамічний» метод розрахунку стійкості).

**Приклад 5.** Визначити період малих коливань математичного маятника (див. приклад 5 § 2.6, рис. 2.4).

### *Розв'язання*

Для визначення узагальнених коефіцієнтів жорсткості  $c$  і інерції  $a$  потрібно скласти вирази потенціальної і кінетичної енергії системи в довільному положенні і порівняти їх із загальними формулами (3.19) і (3.20).

Знайдемо узагальнений коефіцієнт жорсткості  $c$ . Потенціальна енергія математичного маятника була визначена в прикладі 3 § 2.2:

$$\Pi = mgl \cdot (1 - \cos \varphi).$$

Розкладемо функцію  $\cos \varphi$  в ряд Маклорена і утримаємо доданки порядку

малізми не вищого, ніж другий:  $\cos \varphi \approx 1 - \frac{1}{2} \varphi^2$ .

Отже, 
$$\Pi = mgl \cdot (1 - \cos \varphi) \approx mgl \cdot (1 - 1 + \frac{1}{2} \varphi^2) = mgl \cdot \frac{\varphi^2}{2}.$$

Порівнюючи цей вираз з формулою (3.20), знаходимо узагальнений

коефіцієнт жорсткості як множник між числовим коефіцієнтом  $\frac{1}{2}$  і

квадратом узагальненої координати  $\varphi^2$ :

$$c = mgl.$$

Знайдемо узагальнений коефіцієнт інерції  $a$ . Кінетична енергія математичного маятника була визначена в прикладі 4 § 2.6:

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m \cdot (\dot{\varphi} \cdot l)^2}{2} = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2.$$

Порівнюючи цей вираз з формулою (3.19), знаходимо узагальнений коефіцієнт інерції як множник між числовим коефіцієнтом  $\frac{1}{2}$  і квадратом узагальненої швидкості  $\dot{\varphi}^2$ , обчислений при малих коливаннях у положенні рівноваги  $\varphi = 0$  :

$$a = (ml^2)_{\varphi=0} = ml^2.$$

3. Визначимо період малих коливань за формулою (3.27):

$$T_{\text{період}} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{c}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

**Відповідь.**  $T_{\text{період}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ . З цієї формули випливає, що період математичного маятника залежить тільки від довжини стержня  $l$ . Чим більшою є довжина, тим більший період коливань маятника.

### 3.6. Вплив сил опору на малі коливання консервативної системи з одним степенем вільності навколо положення стійкої рівноваги

Нехай на механічну систему, крім консервативних, діють *сили в'язкого тертя*, що пропорційні швидкостям точок системи і напрямлені протилежно цим швидкостям:

$$\bar{R}_k = -\alpha_k \bar{v}_k, \quad k = 1, \dots, N.$$

При русі системи ці сили здійснюють від'ємну роботу, повна енергія системи зменшується («розсіюється»), тому такі сили, як і механічні системи, називають **дисипативними**. Узагальнена сила опору, що відповідає дисипативним силам, знаходиться тими ж способами, що і для звичайних неконсервативних сил (за формулами (2.6) чи (2.7) § 2.2). Можна показати, що для системи з одним степенем вільності, з голономними й стаціонарними в'язями, узагальнена сила опору визначається за формулою

$$Q_R = -b\dot{q}, \quad (3.28)$$

де  $b$  - сталий коефіцієнт (*узагальнений коефіцієнт опору*).

У цьому разі рівняння Лагранжа має вигляд

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} + Q_R, \quad (3.29)$$

де перший доданок у правій частині рівняння відповідає консервативним, а другий – дисипативним силам. Враховуючи формули для кінетичної (3.19) і потенціальної (3.20) енергій, а також формулу (3.28), рівняння Лагранжа (3.29) набуде вигляду

$$a\ddot{q} = -cq - b\dot{q}.$$

Перетворюючи це рівняння, як і в § 3.5, і вводячи позначення

$$\omega_0^2 = \frac{c}{a}, \quad 2h = \frac{b}{a}, \quad (3.30)$$

отримаємо *диференціальне рівняння малих коливань механічної системи при дії консервативних і дисипативних сил навколо положення стійкої рівноваги*:

$$\ddot{q} + 2h\dot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (3.31)$$

Це рівняння також є лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Знайдемо розв'язки диференціального рівняння (3.31).

Характеристичне рівняння для (3.31) має вигляд

$$z^2 + 2hz + \omega_0^2 = 0,$$

його корені дорівнюють

$$z_1 = -h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2}, \quad z_2 = -h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2}. \quad (3.32)$$

Із (3.32) видно, що характер руху системи істотним чином залежить від співвідношення  $h$  і  $\omega_0$ : якщо  $h \geq \omega_0$ , то корені характеристичного рівняння дійсні, якщо  $h < \omega_0$  - то комплексні. Розглянемо ці випадки.

1). *Випадок великого опору:  $h > \omega_0$ .*

Загальний розв'язок диференціального рівняння (3.31) матиме вигляд

$$q = C_1 \cdot e^{z_1 t} + C_2 \cdot e^{z_2 t}. \quad (3.33)$$

Це рівняння описує *аперіодичний (не коливальний) затухаючий рух*. Узагальнена координата  $q$  при  $t \rightarrow \infty$  монотонно зменшується по експоненті (оскільки обидва корені  $z_1$  і  $z_2$  від'ємні), і система наближається до положення статичної рівноваги. Графіки функції (3.33) при різних початкових умовах (при  $q_0 > 0, \dot{q}_0 > 0$  - крива 1; при  $q_0 > 0, \dot{q}_0 \leq 0$ , але  $|\dot{q}_0| < |z_2| q_0$  - крива 2; при  $q_0 > 0, \dot{q}_0 < 0$ , але  $|\dot{q}_0| > |z_2| q_0$  - крива 3) наведені на рис. 3.8.

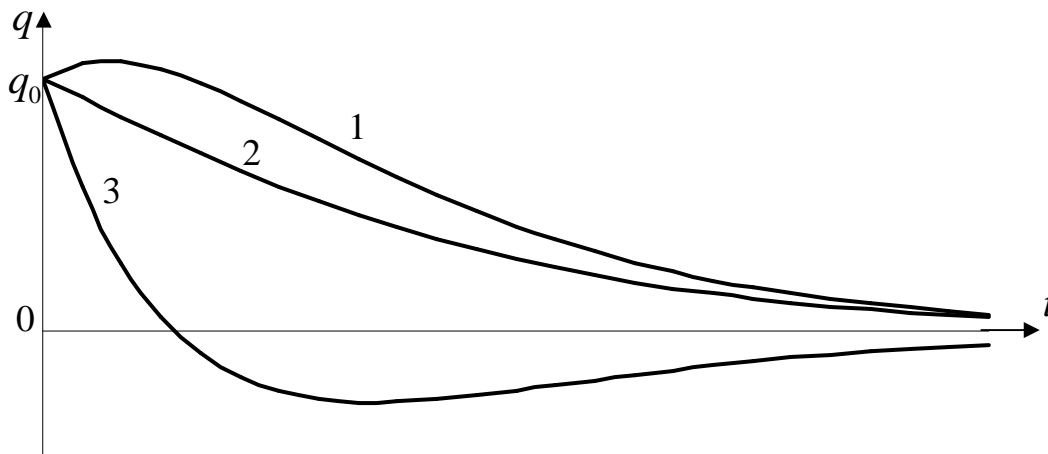


Рис. 3.8

2). *Граничний випадок:  $h = \omega_0$ .*

Загальний розв'язок диференціального рівняння (3.31) матиме вигляд

$$q = e^{-ht} \cdot (C_1 + C_2 \cdot t), \quad (3.34)$$

Такий рух також є *аперіодичним затухаючим* ( $q \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ ) і графіки функції (3.34) при різних початкових умовах мають вигляд, як на рис. 3.8.

3). *Випадок малого опору:  $h < \omega_0$ .*

Загальний розв'язок диференціального рівняння (3.31) матиме вигляд

$$q = e^{-ht} \cdot (C_1 \cos \omega_0^* t + C_2 \sin \omega_0^* t), \quad (3.35)$$

де  $C_1 = q_0$ ,  $C_2 = \frac{\dot{q}_0 + hq_0}{\omega_0^*}$  - сталі інтегрування, які визначаються за

допомогою початкових умов, а величина

$$\omega_0^* = \sqrt{\omega_0^2 - h^2} . \quad (3.36)$$

Для зручності аналізу перетворимо вираз (3.35) у форму, аналогічну (3.25):

$$q = A \cdot e^{-ht} \cdot \sin(\omega_0^* t + \varepsilon), \quad (3.37)$$

$$\text{де } A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{q_0^2 + \left( \frac{\dot{q}_0 + hq_0}{\omega_0^*} \right)^2}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{C_1}{C_2} = \frac{q_0 \cdot \omega_0^*}{\dot{q}_0 + hq_0}.$$

З рівнянь (3.35) або (3.37) видно, що *рух системи має затухаючий коливальний характер* (оскільки  $e^{-ht} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ ), а величина  $\omega_0^*$  має назву *колової частоти затухаючих коливань* (або *власної частоти коливань дисипативної системи*). Графік функції (3.37) наведений на рис.3.9.

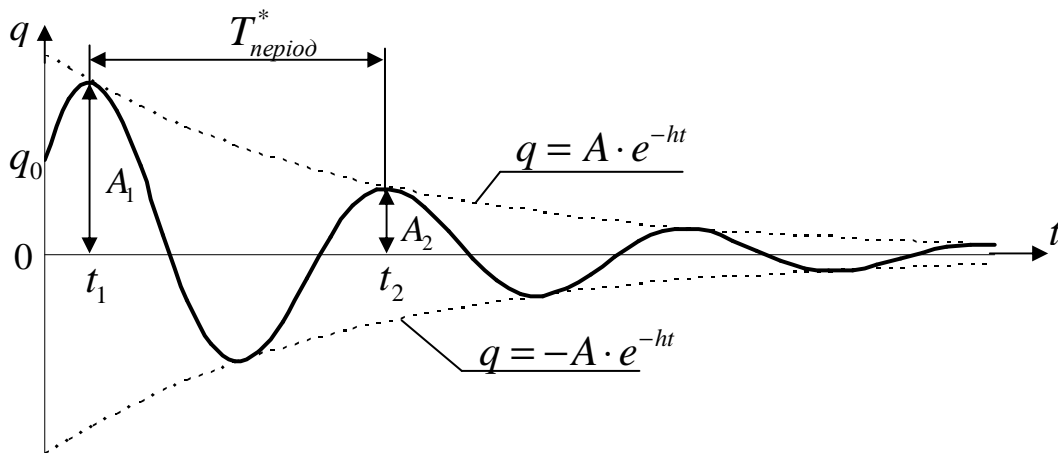


Рис. 3.9

На рис. 3.9 криві  $q = A \cdot e^{-ht}$  і  $q = -A \cdot e^{-ht}$  є границями області, усередині якої розташовується графік руху. Рух системи є коливальним, але не періодичним, оскільки з часом послідовні максимальні відхилення узагальненої координати від положення рівноваги  $A_1, A_2, \dots$  зменшуються.

Проте проміжок часу  $T_{\text{період}}^*$  між цими відхиленнями є величиною сталою і дорівнює



$$T_{\text{period}}^* = \frac{2\pi}{\omega_0^*}. \quad (3.38)$$

Величину  $T_{\text{period}}^*$  умовно називають **періодом затухаючих коливань**. Зрівнюючи формули (3.27), (3.36) і (3.38), можна зробити висновок, що *період затухаючих коливань більший за період відповідних вільних коливань системи*.

Розглянемо відношення послідовних максимальних відхилень узагальненої координати від положення рівноваги:

$$\begin{aligned} \frac{A_2}{A_1} &= \frac{\cancel{A} \cdot e^{-ht_2} \cdot \sin(\omega_0^* t_2 + \varepsilon)}{\cancel{A} \cdot e^{-ht_1} \cdot \sin(\omega_0^* t_1 + \varepsilon)} = \frac{e^{-h(t_1 + T_{\text{period}}^*)} \cdot \sin[\omega_0^* (t_1 + T_{\text{period}}^*) + \varepsilon]}{e^{-ht_1} \cdot \sin(\omega_0^* t_1 + \varepsilon)} = \\ &= \frac{\cancel{e^{-ht_1}} \cdot e^{-hT_{\text{period}}^*} \cdot \sin(\omega_0^* t_1 + 2\pi + \varepsilon)}{\cancel{e^{-ht_1}} \cdot \sin(\omega_0^* t_1 + \varepsilon)} = \frac{e^{-hT_{\text{period}}^*} \cdot \cancel{\sin(\omega_0^* t_1 + \varepsilon)}}{\cancel{\sin(\omega_0^* t_1 + \varepsilon)}} = e^{-hT_{\text{period}}^*}. \end{aligned}$$

Таким чином, відношення послідовних амплітуд затухаючих коливань стало і дорівнює

$$\eta = \frac{A_2}{A_1} = e^{-hT_{\text{period}}^*}. \quad (3.39)$$

Величина  $\eta$  (знаменник геометричної прогресії, за якою спадають амплітуди затухаючих коливань) називається **декрементом затухаючих коливань** (фактором затухання), а модуль натурального логарифма цієї величини

$$\Lambda = |\ln \eta| = hT_{\text{period}}^* \quad (3.40)$$

- **логарифмічним декрементом затухаючих коливань**. Поняття про декремент затухаючих коливань використовують при експериментальному визначенні коефіцієнта опору середовища.

На фазовій площині зображальна точка при затухаючих коливаннях буде рухатись по спіралі, асимптотично наближаючись до початку координат (положення рівноваги)  $O$ . Точка  $O$  називається особливою точкою типу «**стійкий фокус**» (рис.3.10).

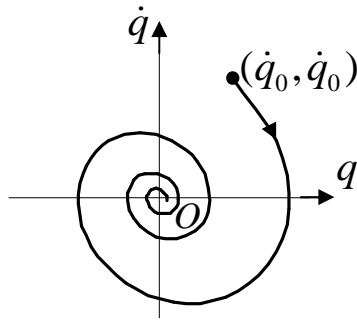


Рис. 3.10

Як випливає з визначення § 3.2, положення рівноваги механічної системи при дії консервативних і дисипативних сил є **асимптотично стійким**.

### Приклад 6.

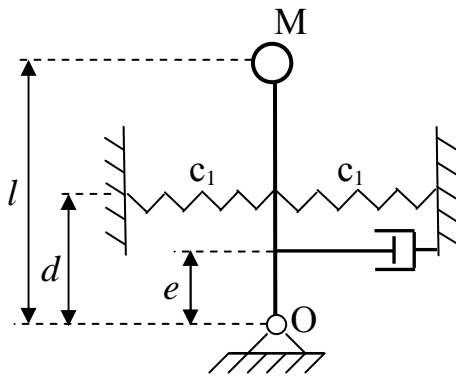


Рис. 3.11

Визначити період малих коливань астатичного маятника (див. приклад 3 §3.3) з приєднаним на відстані  $e$  від нижнього кінця стержня демпфером - пристроєм, що створює силу опору, пропорційну швидкості поршня демпфера, і сприяю гасінню коливань (рис. 3.11).

### Розв'язання

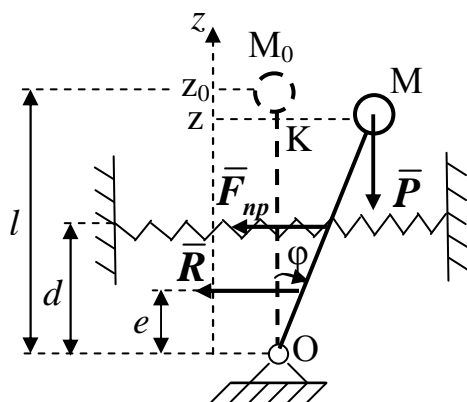


Рис. 3.12

Розрахункова схема для довільного положення маятника (рис. 3.12) аналогічна рис. 3.5 § 3.3, проте на стержень додатково діє сила опору (сила в'язкого тертя)  $\bar{R} = -\alpha \bar{v}$ , де  $\alpha$  - заданий коефіцієнт пропорційності. Складемо рівняння Лагранжа (3.29). Вирази кінетичної  $T$  і потенціальної

П енергій були знайдені у прикладі 4 § 3.5. Знайдемо узагальнену силу  $Q_R$ , що відповідає дисипативній силі  $\bar{R}$ . Для цього скористаємось другим

способом визначення узагальненої сили (див. § 2.2), що базується на співвідношенні (2.7). Обчислимо можливу роботу сили опору як добуток її моменту відносно точки  $O$  на можливий кут  $\delta\varphi$ . Добуток буде від'ємний, оскільки напрями моменту сили і можливого кута  $\delta\varphi$  не збігаються:

$$\delta A_R = -|M_O(\bar{R})| \cdot \delta\varphi = -R \cdot e \cdot \delta\varphi = -\alpha v \cdot e \cdot \delta\varphi = -\alpha \dot{\varphi} e \cdot e \cdot \delta\varphi = -\alpha e^2 \dot{\varphi} \cdot \delta\varphi,$$

де  $v = \omega \cdot e = \dot{\varphi} \cdot e$  - лінійна швидкість точки стержня, до якої прикладена сила  $\bar{R}$ . Множник  $Q_R = -\alpha e^2 \dot{\varphi}$  при варіації узагальненої координати  $\delta\varphi$  і буде узагальненою силою, що відповідає дисипативній силі  $\bar{R}$ .

Обчислимо частинні похідні:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= 0; & \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= ml^2 \dot{\varphi}; & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= ml^2 \ddot{\varphi}; \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} &= (-mgl + 2c_1 d^2) \varphi. \end{aligned}$$

Тоді рівняння Лагранжа (3.29) набуде вигляду

$$ml^2 \ddot{\varphi} - 0 = (-mgl + 2c_1 d^2) \varphi - \alpha e^2 \dot{\varphi}.$$

Перетворимо це рівняння до вигляду (3.31):

$$\begin{aligned} ml^2 \ddot{\varphi} + \alpha e^2 \dot{\varphi} + (mgl - 2c_1 d^2) \varphi &= 0, \\ \ddot{\varphi} + \frac{\alpha e^2}{ml^2} \dot{\varphi} + \frac{mgl - 2c_1 d^2}{ml^2} \varphi &= 0. \end{aligned}$$

Вводячи позначення

$$\omega_0^2 = \frac{mgl - 2c_1 d^2}{ml^2}, \quad 2h = \frac{\alpha e^2}{ml^2},$$

отримаємо диференціальне рівняння руху (3.31):

$$\ddot{\varphi} + 2h\dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0.$$

У випадку  $h < \omega_0$  (а саме такими підбираються параметри  $\alpha, e$  демпфера) система здійснює затухаючі коливання з періодом (див. формулу (3.38))

$$T_{\text{period}}^* = \frac{2\pi}{\omega_0^*} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - h^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{mgl - 2c_1 d^2}{ml^2} - \left(\frac{\alpha e^2}{2ml^2}\right)^2}}.$$

### 3.7. Малі вимушені коливання механічної системи з одним степенем вільності навколо положення стійкої рівноваги

Вимушені коливання відбуваються за умови, що на механічну систему, крім консервативних, діє неконсервативна збурююча сила, що явно залежить від часу.

#### 3.7.1. Випадок довільної збурюючої сили

Розглянемо випадок, коли збурююча сила залежить від часу за довільним законом:

$$F_B = F(t).$$

Позначимо відповідну узагальнену силу  $Q_F = H(t)$  і складемо рівняння Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} + Q_F.$$

З урахуванням виразів кінетичної і потенціальної енергій (3.19), (3.20) це рівняння прийме вигляд

$$a\ddot{q} + cq = H(t)$$

або

$$\ddot{q} + \frac{c}{a}q = \frac{H(t)}{a}.$$

Вводячи позначення

$$\omega_0^2 = \frac{c}{a}, \quad h_B = \frac{H(t)}{a}, \quad (3.41)$$

отримаємо *диференціальне рівняння малих вимушених коливань механічної системи навколо положення стійкої рівноваги*:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = h_B(t). \quad (3.42)$$

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (3.42) зі сталими коефіцієнтами складається із загального розв'язку відповідного однорідного рівняння і частинного розв'язку даного неоднорідного рівняння:

$$q = q_{\text{заг}} + q_{\text{ч}}. \quad (3.43)$$

Розв'язок відповідного однорідного рівняння  $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$  має вигляд (3.23)

$$q_{\text{заг}} = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t, \quad (3.44)$$

де  $C_1, C_2$  - сталі інтегрування.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (3.42) будемо розшукувати у формі

$$q_{\text{ч}} = D_1(t) \cos \omega_0 t + D_2(t) \sin \omega_0 t, \quad (3.45)$$

де  $D_1(t), D_2(t)$  - невідомі функції часу. Такий метод визначення частинного розв'язку називається *методом варіації довільних сталих* (методом Лагранжа).

Знайдемо похідну за часом від частинного розв'язку:

$$\dot{q}_{\text{ч}} = \dot{D}_1 \cos \omega_0 t + \dot{D}_2 \sin \omega_0 t - D_1 \omega_0 \sin \omega_0 t + D_2 \omega_0 \cos \omega_0 t.$$

Оскільки для пошуку одного частинного розв'язку були введені дві невідомі функції, їх можна підпорядкувати додатковій умові. Поставимо вимогу, щоб виконувалась рівність

$$\dot{D}_1 \cos \omega_0 t + \dot{D}_2 \sin \omega_0 t = 0. \quad (3.46)$$

Тоді

$$\dot{q}_{\text{ч}} = -D_1 \omega_0 \sin \omega_0 t + D_2 \omega_0 \cos \omega_0 t.$$

Знайдемо другу похідну за часом від частинного розв'язку:

$$\ddot{q}_{\text{ч}} = -\dot{D}_1 \omega_0 \sin \omega_0 t + \dot{D}_2 \omega_0 \cos \omega_0 t - D_1 \omega_0^2 \cos \omega_0 t - D_2 \omega_0^2 \sin \omega_0 t. \quad (3.47)$$

Підставимо (3.47) і (3.45) у рівняння (3.42):

$$\begin{aligned}
& -\dot{D}_1 \omega_0 \sin \omega_0 t + \dot{D}_2 \omega_0 \cos \omega_0 t - \cancel{D_1 \omega_0^2 \cos \omega_0 t} - \cancel{D_2 \omega_0^2 \sin \omega_0 t} + \\
& + \cancel{D_1 \omega_0^2 \cos \omega_0 t} + \cancel{D_2 \omega_0^2 \sin \omega_0 t} = h_B(t). \quad (3.48)
\end{aligned}$$

Таким чином, для двох невідомих функцій  $\dot{D}_1, \dot{D}_2$  маємо два рівняння (3.46), (3.48). З рівняння (3.46) виразимо  $\dot{D}_1$  через  $\dot{D}_2$ :

$$\dot{D}_1 = -\dot{D}_2 \frac{\sin \omega_0 t}{\cos \omega_0 t} \quad (3.49)$$

і підставимо в рівняння (3.48)

$$\dot{D}_2 \frac{\sin \omega_0 t}{\cos \omega_0 t} \cdot \omega_0 \sin \omega_0 t + \dot{D}_2 \omega_0 \cos \omega_0 t = h_B(t)$$

або

$$\dot{D}_2 \cdot \omega_0 (\sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t) = h_B(t) \cos \omega_0 t,$$

звідки

$$\dot{D}_2 = \frac{1}{\omega_0} h_B(t) \cos \omega_0 t. \quad (3.50)$$

З рівняння (3.49)

$$\dot{D}_1 = -\frac{1}{\omega_0} h_B(t) \cancel{\cos \omega_0 t} \cdot \frac{\sin \omega_0 t}{\cancel{\cos \omega_0 t}} = -\frac{1}{\omega_0} h_B(t) \sin \omega_0 t. \quad (3.51)$$

Інтегруючи за часом (3.50) і (3.51), отримаємо вирази для функцій  $D_1, D_2$ :

$$\begin{cases} D_1 = -\frac{1}{\omega_0} \int_0^t h_B(\xi) \sin \omega_0 \xi d\xi \\ D_2 = \frac{1}{\omega_0} \int_0^t h_B(\xi) \cos \omega_0 \xi d\xi \end{cases}, \quad (3.52)$$

де  $\xi$  - змінна інтегрування.

Підставимо (3.52) в (3.45) і внесемо функції  $\cos \omega_0 t$ ,  $\sin \omega_0 t$  під знаки інтегралів, оскільки вони не залежать від змінної  $\xi$ :

$$\begin{aligned}
q_u &= -\frac{1}{\omega_0} \cos \omega_0 t \cdot \int_0^t h_B(\xi) \sin \omega_0 \xi d\xi + \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \cdot \int_0^t h_B(\xi) \cos \omega_0 \xi d\xi = \\
&= \frac{1}{\omega_0} \cdot \int_0^t h_B(\xi) [-\cos \omega_0 t \sin \omega_0 \xi + \sin \omega_0 t \cos \omega_0 \xi] d\xi = \\
&= \frac{1}{\omega_0} \cdot \int_0^t h_B(\xi) \sin \omega_0 (t - \xi) d\xi.
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Нарешті, підставляючи (3.44) і (3.53) у (3.43), отримаємо загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (3.42):

$$q = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{1}{\omega_0} \cdot \int_0^t h_B(\xi) \sin \omega_0 (t - \xi) d\xi, \tag{3.54}$$

де  $C_1, C_2$  - сталі інтегрування, що визначаються з початкових умов,

$\omega_0$  - власна колова частота (колова частота вільних коливань).

Неважко показати, що для довільних початкових умов  $q|_{t=0} = q_0, \dot{q}|_{t=0} = \dot{q}_0$  сталі інтегрування будуть

$$C_1 = q_0, \quad C_2 = \frac{\dot{q}_0}{\omega_0},$$

оскільки інтеграл, що відповідає частинному розв'язку, при  $t = 0$  дорівнює 0. Тоді рівняння (3.54) приймає вигляд

$$q = q_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{q}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{1}{\omega_0} \cdot \int_0^t h_B(\xi) \sin \omega_0 (t - \xi) d\xi. \tag{3.55}$$

Рівняння (3.55) є **рівнянням вимушених коливань** механічної системи навколо положення її стійкої рівноваги *при довільній збурюючій силі*.

**Зауваження 1.** При наявності малого опору і довільної збурюючої сили загальний розв'язок (3.54) набуде вигляду

$$q = e^{-ht} (C_1 \cos \omega_0^* t + C_2 \sin \omega_0^* t) + \frac{1}{\omega_0^*} \cdot \int_0^t h_B(\xi) e^{-h(t-\xi)} \sin \omega_0^* (t - \xi) d\xi. \tag{3.56}$$

**Зауваження 2.** За допомогою формул (3.55) або (3.56) знаходять закон вимушених коливань механічних систем при ударних (удар, вибух), раптом прикладених, сейсмічних, вітрових та інших негармонічних діях.

**Приклад 7.**

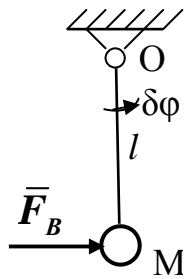


Рис. 3.13

Визначити рівняння вимушених коливань математичного маятника при дії ударного імпульсу (рис. 3.13). Збурюючу силу в цьому разі можна описати за допомогою  $\delta$ -функції:  $F_B = S \cdot \delta(t)$ , де  $S$  - величина ударного імпульсу.

**Розв'язання**

Знайдемо узагальнену силу  $Q_F$ , що відповідає збурюючій силі  $\bar{F}_B$ . Для цього скористаємось другим способом визначення узагальненої сили (див. § 2.2), який базується на співвідношенні (2.7). Обчислимо можливу роботу збурюючої сили як добуток її моменту відносно точки  $O$  на можливий кут  $\delta\varphi$ , який потрібно подати маятнику з його вертикального положення (положення, в якому діє ударний імпульс). Добуток буде додатний, оскільки напрями моменту сили і можливого кута  $\delta\varphi$  збігаються:

$$\delta A_{F_B} = |M_O(\bar{F}_B)| \cdot \delta\varphi = F_B \cdot l \cdot \delta\varphi = S \delta(t) l \delta\varphi,$$

Множник  $Q_{F_B} = S \delta(t) l$  при варіації узагальненої координати  $\delta\varphi$  і буде узагальненою силою  $H(t)$ , що відповідає збурюючій силі  $\bar{F}_B$ . Тоді згідно з

позначенням (3.41) параметр  $h_B = \frac{H(t)}{a} = \frac{S \delta(t) l}{m l^2} = \frac{S}{m l} \delta(t)$ .

Складемо розв'язок (3.55). При нульових початкових умовах перші два доданки дорівнюють нулю і закон вимушених коливань математичного маятника визначиться за формулою

$$\varphi = \frac{1}{\omega_0} \cdot \int_0^t h_B(\xi) \sin \omega_0(t - \xi) d\xi = \frac{1}{\omega_0} \cdot \int_0^t \frac{S}{m l} \delta(t) \sin \omega_0(t - \xi) d\xi =$$



$$= \frac{S}{ml\omega_0} \cdot \int_0^t \delta(t) \sin \omega_0(t - \xi) d\xi = \frac{S}{ml\omega_0} \sin \omega_0(t - 0) = \frac{S}{ml\omega_0} \sin \omega_0 t,$$

де  $\omega_0$  - колова частота власних (вільних) коливань, що визначається за формулою (3.41) або (3.21):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{mgl}{ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

а при визначенні інтегралу була врахована властивість  $\delta$ -функції:

$$\int_0^t \delta(\xi - t_0) f(\xi) d\xi = f(t_0).$$

**Відповідь.** Після удару математичний маятник здійснюватиме коливальний рух навколо положення рівноваги за гармонійним законом з амплітудою

$$\frac{S}{ml\omega_0} \text{ і коловою частотою } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

### 3.7.2. Випадок гармонійної збурюючої сили

Розглянемо випадок, коли збурююча сила залежить від часу за гармонійним законом і відповідна узагальнена сила  $Q_F = H \sin \omega_B t$ . В цьому

разі  $h_B(t) = \frac{H}{a} \sin \omega_B t = h_B \sin \omega_B t$ . Визначимо останній доданок формули

(3.55):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_0} \cdot \int_0^t h_B(\xi) \sin \omega_0(t - \xi) d\xi &= \frac{1}{\omega_0} \cdot \int_0^t h_B \sin \omega_B \xi \cdot \sin \omega_0(t - \xi) d\xi = \\ &= \frac{h_B}{\omega_0} \cdot \int_0^t \sin \omega_B \xi \cdot \sin \omega_0(t - \xi) d\xi. \end{aligned}$$

Врахуємо формулу тригонометрії:

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)].$$

Тоді

$$\begin{aligned}
\frac{h_B}{\omega_0} \cdot \int_0^t \sin \omega_B \xi \cdot \sin \omega_0 (t - \xi) d\xi &= \frac{h_B}{2\omega_0} \cdot \left[ \int_0^t \cos(\omega_B \xi - \omega_0 t + \omega_0 \xi) d\xi - \right. \\
&\quad \left. - \int_0^t \cos(\omega_B \xi + \omega_0 t - \omega_0 \xi) d\xi \right] = \frac{h_B}{2\omega_0} \cdot \left\{ \int_0^t \cos[\xi(\omega_B + \omega_0) - \omega_0 t] d\xi - \right. \\
&\quad \left. - \int_0^t \cos[\xi(\omega_B - \omega_0) + \omega_0 t] d\xi \right\} = \frac{h_B}{2\omega_0} \cdot \left\{ \frac{\sin[\xi(\omega_B + \omega_0) - \omega_0 t]_0^t}{\omega_B + \omega_0} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sin[\xi(\omega_B - \omega_0) + \omega_0 t]_0^t}{\omega_B - \omega_0} \right\} = \frac{h_B}{2\omega_0} \cdot \left[ \frac{\sin \omega_B t + \sin \omega_0 t}{\omega_B + \omega_0} - \frac{\sin \omega_B t - \sin \omega_0 t}{\omega_B - \omega_0} \right] = \\
&= \frac{h_B}{2\omega_0} \cdot \left[ \frac{\cancel{\omega_B \sin \omega_B t} - \omega_0 \sin \omega_B t + \omega_B \sin \omega_0 t - \cancel{\omega_0 \sin \omega_0 t}}{\omega_B^2 - \omega_0^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\cancel{-\omega_B \sin \omega_B t} - \omega_0 \sin \omega_B t + \omega_B \sin \omega_0 t + \cancel{\omega_0 \sin \omega_0 t}}{\omega_B^2 - \omega_0^2} \right] = \\
&= \frac{h_B}{2\omega_0} \cdot \left[ \frac{-2\omega_0 \sin \omega_B t + 2\omega_B \sin \omega_0 t}{\omega_B^2 - \omega_0^2} \right] = \frac{h_B \sin \omega_B t}{\omega_0^2 - \omega_B^2} - \frac{\omega_B}{\omega_0} \cdot \frac{h_B \sin \omega_0 t}{\omega_0^2 - \omega_B^2}.
\end{aligned}$$

Отже, загальний розв'язок (3.55) набуде вигляду

$$q = q_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{q}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t - \frac{\omega_B}{\omega_0} \cdot \frac{h_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \sin \omega_0 t + \frac{h_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \sin \omega_B t. \quad (3.57)$$

Рівняння (3.57) є **рівнянням вимушених коливань** механічної системи навколо положення її стійкої рівноваги *при гармонійній збурюючій силі*.

Проаналізуємо *властивості вимушених коливань при гармонійній збурюючій силі*.

1). Вимушені коливання є *бігармонійними*, тобто складаються з вільних коливань з частотою  $\omega_0$  (описуються першими трьома доданками рівняння (3.57)) і чисто вимушених коливань з частотою збурюючої сили  $\omega_B$  (останній доданок рівняння (3.57)). При цьому вільні коливання збуджуються і при нульових початкових умовах (третій доданок описує власні коливання, які спричиняються збурюючою силою і не залежать від початкових умов).

2). Амплітуда чисто вимушених коливань  $|A_B| = \frac{h_B}{|\omega_0^2 - \omega_B^2|}$  не залежить від початкових умов, а визначається параметрами збурюючої сили і системи.

3). Колова частота чисто вимушених коливань  $\omega_B$  не залежить від параметрів системи, а визначається збурюючою силою.

4). За умови  $\omega_B = \omega_0$  амплітуда вимушених коливань  $|A_B| \rightarrow \infty$ , тобто необмежено зростає. Явище необмеженого зростання амплітуди вимушених коливань називається *резонансом*, а рівність  $\omega_B = \omega_0$  - *умовою резонансу*.

### 3.7.3. Коефіцієнт динамічності при дії гармонійної збурюючої сили

Простежимо залежність амплітуди чисто вимушених коливань  $|A_B|$  від відношення частот вимушених і власних коливань  $z = \frac{\omega_B}{\omega_0}$ . Перетворимо

формулу для амплітуди  $|A_B|$ :

$$|A_B| = \frac{h_B}{|\omega_0^2 - \omega_B^2|} = \frac{\frac{h_B}{\omega_0^2}}{\left|1 - \frac{\omega_B^2}{\omega_0^2}\right|} = \frac{\frac{H}{a} \cdot \frac{a}{c}}{\left|1 - \frac{\omega_B^2}{\omega_0^2}\right|} = \frac{\frac{H}{c}}{\left|1 - \frac{\omega_B^2}{\omega_0^2}\right|} = \frac{q_{cm}}{\left|1 - \frac{\omega_B^2}{\omega_0^2}\right|} = \frac{q_{cm}}{|1 - z^2|}, \quad (3.58)$$

де  $q_{cm}$  - *статичне відхилення* системи від положення рівноваги під дією сталої сили  $H$ , що дорівнює амплітуді узагальненої збурюючої сили.

**Коефіцієнтом динамічності  $\mu$**  називається відношення амплітуди вимушених коливань  $|A_B|$  до статичного відхилення  $q_{ст}$ :

$$\mu = \frac{|A_B|}{q_{ст}} = \frac{1}{|1 - z^2|}. \quad (3.59)$$

З формули (3.59) випливає, що коефіцієнт динамічності є *власною характеристикою* коливальної системи, яка не залежить від амплітуди збурення. Він *показує*, у скільки разів амплітуда вимушених коливань перевершує статичне відхилення, *характеризує* динамічний ефект, що викликається збурюючою силою і *залежить* тільки від відношення частот вимушених і власних коливань ( $z = \frac{\omega_B}{\omega_0}$ ).

З урахуванням опору середовища формула (3.59) прийме вигляд

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\beta^2 z^2}}, \quad (3.60)$$

де  $\beta = \frac{h}{\omega_0}$  - безрозмірний коефіцієнт демпфірування.

Графік коефіцієнта динамічності (3.60) для декількох значень безрозмірного коефіцієнта демпфірування  $\beta$  наведений на рис. 3.14.

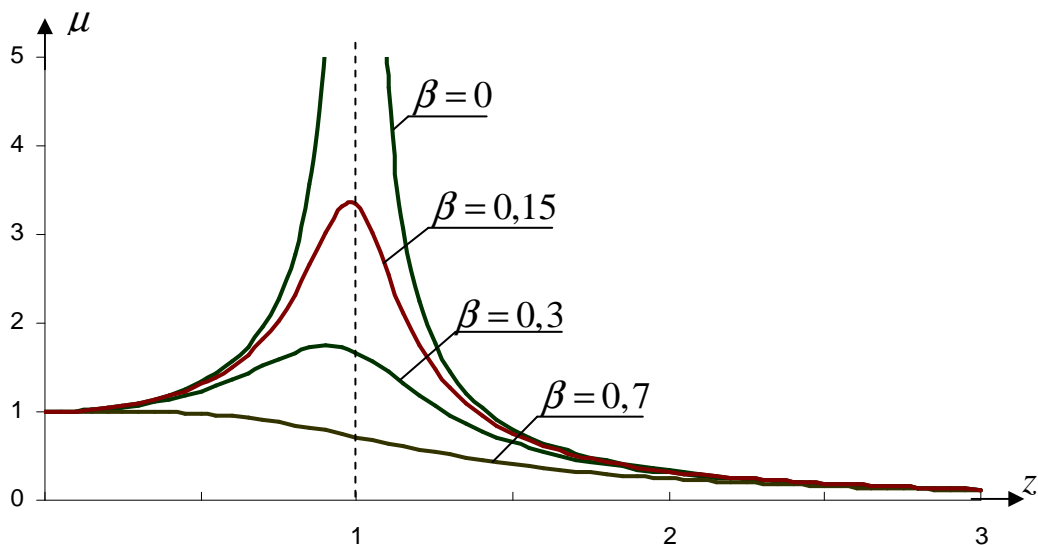


Рис. 3.14

Аналізуючи рис. 3.14, можна зробити такі висновки:

1). При значеннях безрозмірної частоти  $z$  достатньо великих і достатньо малих у порівнянні з  $z=1$  коефіцієнт динамічності ( $a$ , отже, і амплітуда вимушених коливань) мало залежить від опору середовища. Навпаки, при  $z$  близьких до  $z=1$  вплив опору на коефіцієнт динамічності достатньо суттєвий.

2). При  $z \rightarrow \infty$  коефіцієнт динамічності асимптотично наближається до нуля. Це означає, що якою б великою не була амплітуда збурюючої сили, вимушені коливання будуть досить малими, якщо частота збурюючої сили набагато більша за власну.

3). Коефіцієнт динамічності набуває максимуму при значенні  $z$  трохи меншим (якщо бути точними, при  $z = \sqrt{1-2\beta^2}$ ) за резонансне значення  $z=1$ . При цьому при збільшенні коефіцієнта опору  $\beta$  зсув максимуму збільшується.

4). При резонансі у поєднанні з малим значенням коефіцієнта опору  $\beta$  амплітуда вимушених коливань може бути досить значною навіть при невеликій амплітуді збурюючої сили.

5). При значенні коефіцієнта опору  $\beta \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$  зростання амплітуди вимушених коливань в зоні резонансу не відбувається, більше того, за будь-якою частоти збурюючої сили амплітуда вимушених коливань не перевищує статичне відхилення  $q_{cm}$ .

## 4. Малі коливання механічних систем зі скінченним числом степенів вільності навколо положення стійкої рівноваги

### 4.1. Вільні коливання консервативної системи з двома степенями вільності

Розглянемо консервативну систему з голономними й стаціонарними зв'язями, яка має два степеня вільності. Положення системи будемо визначати узагальненими координатами  $q_1, q_2$ , що відлічуються від положення стійкої рівноваги.

Кінетична енергія системи з урахуванням симетрії узагальнених коефіцієнтів інерції ( $a_{12} = a_{21}$ ) буде мати вигляд

$$T = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2), \quad (4.1)$$

де для малих коливань

$$a_{11}(q_1, q_2) \approx a_{11}(0, 0) = a_{11} = \text{const},$$

$$a_{12}(q_1, q_2) \approx a_{12}(0, 0) = a_{12} = \text{const},$$

$$a_{22}(q_1, q_2) \approx a_{22}(0, 0) = a_{22} = \text{const}.$$

При цьому оскільки при русі системи  $T > 0$  (тобто  $T$  є додатно-визначеною квадратичною формою), то згідно з критерієм Сільвестра має виконуватись співвідношення

$$a_{11} > 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0.$$

Потенціальна енергія для малих коливань з урахуванням симетрії узагальнених коефіцієнтів жорсткості ( $c_{12} = c_{21}$ ) визначається за формулою

$$П = \frac{1}{2}(c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2). \quad (4.2)$$

Зважаючи на стійкість положення рівноваги, за критерієм Сільвестра повинно бути:

$$c_{11} > 0, \quad c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0.$$

Складемо рівняння Лагранжа другого роду:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2. \end{cases} \quad (4.3)$$

які, враховуючи формули (4.1) і (4.2), приймуть вигляд

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 = -c_{11}q_1 - c_{12}q_2, \\ a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 = -c_{12}q_1 - c_{22}q_2. \end{cases}$$

Перенесемо шукані функції часу у ліву частину рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = 0, \\ a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{12}q_1 + c_{22}q_2 = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Рівняння (4.4) називаються **диференціальними рівняннями малих вільних коливань консервативної системи з двома степенями вільності навколо положення стійкої рівноваги**. Це – система двох звичайних лінійних однорідних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами.

Розв'язок системи (4.4) будемо шукати у вигляді

$$q_1 = A \sin(\omega t + \varepsilon), \quad q_2 = B \sin(\omega t + \varepsilon), \quad (4.5)$$

де  $A, B, \omega, \varepsilon$  – невідомі сталі величини.

Підставимо (4.5) у (4.4):

$$\begin{cases} (-a_{11}\omega^2 A - a_{12}\omega^2 B + c_{11}A + c_{12}B) \sin(\omega t + \varepsilon) = 0, \\ (-a_{12}\omega^2 A - a_{22}\omega^2 B + c_{12}A + c_{22}B) \sin(\omega t + \varepsilon) = 0, \end{cases}$$

відкинемо множник  $\sin(\omega t + \varepsilon)$  ( для довільного  $t$  він не дорівнює  $0$  ) і

згрупуємо доданки відносно величин  $A$  і  $B$ :

$$\begin{cases} (c_{11} - a_{11}\omega^2)A + (c_{12} - a_{12}\omega^2)B = 0, \\ (c_{12} - a_{12}\omega^2)A + (c_{22} - a_{22}\omega^2)B = 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Як відомо з курсу математики, щоб рівняння (4.6) мали не рівний нулю розв'язок (що є випадком спокою, а не руху), визначник цієї системи має дорівнювати нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}\omega^2 & c_{12} - a_{12}\omega^2 \\ c_{12} - a_{12}\omega^2 & c_{22} - a_{22}\omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.7)$$

Вираз (4.7) відбиває умову існування відмінного від нуля розв'язку для величин  $A$  і  $B$ .

Розкриваючи визначник (4.7), отримаємо:

$$(c_{11} - a_{11}\omega^2)(c_{22} - a_{22}\omega^2) - (c_{12} - a_{12}\omega^2)^2 = 0. \quad (4.8)$$

Рівняння (4.8) називається **частотним рівнянням**. Корені цього рівняння  $\omega_1^2$  і  $\omega_2^2$  (при цьому завжди будемо давати меншому кореню індекс 1) визначають **колові частоти вільних коливань**, або **власні частоти**  $\omega_1$  і  $\omega_2$ . Обидва корені  $\omega_1^2$  і  $\omega_2^2$  мають бути додатними, інакше координати  $q_1$  і  $q_2$  будуть необмежено зростати, чого не може бути при малих коливаннях навколо положення стійкої рівноваги.

**Зауваження.** Якщо для системи  $a_{12} = 0$ ,  $c_{12} = 0$ , то вона розпадається на два незалежних рівняння, для яких відповідні частоти будуть:

$$(\omega_1^{парц})^2 = \frac{c_{11}}{a_{11}}, \quad (\omega_2^{парц})^2 = \frac{c_{22}}{a_{22}}. \quad (4.9)$$

Частоти  $\omega_1^{парц}$  і  $\omega_2^{парц}$  називаються **парціальними частотами** відповідних систем з одним ступенем вільності. Можна показати, що в загальному випадку парціальні частоти розташовуються всередині відрізка частот між першою і другою власними частотами системи з двома степенями вільності:

$$\omega_1 < \omega_1^{парц} < \omega_2^{парц} < \omega_2.$$



Кожному кореню  $\omega_1$  і  $\omega_2$  ( беремо тільки додатні корені ) буде відповідати один частинний розв'язок (4.5) зі своїми значеннями величин  $A$ ,  $B$ ,  $\varepsilon$ .

Загальний розв'язок системи (4.4) отримаємо як лінійну комбінацію незалежних частинних розв'язків (4.5):

$$\begin{cases} q_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2), \\ q_2 = B_1 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1) + B_2 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2). \end{cases} \quad (4.10)$$

Коливання, що відповідають частотам  $\omega_1$  і  $\omega_2$ , називаються **головними**. Менша частота  $\omega_1$  називається **основною**, а відповідне головне коливання – **основним**.

Якщо в рівняння (4.6) підставити знайдені  $\omega_1^2$  і  $\omega_2^2$ , то визначник (4.7) дорівнюватиме нулю. У цьому разі в системі рівнянь (4.6) незалежним буде тільки одне рівняння. Візьмемо, наприклад, перше і знайдемо з нього відношення амплітуд частинних розв'язків:

$$\begin{cases} \mu_1 = \frac{B_1}{A_1} = -\frac{c_{11} - a_{11}\omega_1^2}{c_{12} - a_{12}\omega_1^2}, \\ \mu_2 = \frac{B_2}{A_2} = -\frac{c_{11} - a_{11}\omega_2^2}{c_{12} - a_{12}\omega_2^2}. \end{cases} \quad (4.11)$$

Коефіцієнти  $\mu_1, \mu_2$  називаються **коефіцієнтами форми коливань**. Вони *дорівнюють* відношенням амплітуд узагальнених координат у кожному з головних коливань і *показують*, у скільки разів амплітуда коливань в одній з координат ( $q_2$ ) більша за амплітуду коливань в іншій координаті ( $q_1$ ). За допомогою коефіцієнтів форм будується **форма коливань** – розподілення амплітуд переміщень точок системи у відповідному головному коливанні. З рівнянь (4.11) виходить, що  $B_1 = \mu_1 A_1$ ,  $B_2 = \mu_2 A_2$ . Підставимо ці співвідношення у (4.10):

$$\begin{cases} q_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2), \\ q_2 = \mu_1 A_1 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1) + \mu_2 A_2 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2), \end{cases} \quad (4.12)$$

де довільні сталі  $A_1, A_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$  визначаються за допомогою початкових умов.

Рівняння (4.12) є *рівняннями малих вільних коливань консервативної системи з двома степенями вільності навколо положення стійкої рівноваги*.

Розглянемо властивості вільних коливань.

1. Якщо система виконує одне з головних коливань ( наприклад у випадку  $A_2 = 0$  ), то обидві узагальнені координати  $q_1, q_2$  змінюються з однаковою частотою  $\omega_1$  і фазою  $\omega_1 t + \varepsilon_1$ , тобто координати змінюються синхронно.

2. Власні частоти  $\omega_1$  і  $\omega_2$ , а також коефіцієнти форми  $\mu_1, \mu_2$  не залежать від початкових умов, а визначаються тільки параметрами механічної системи і є *основними характеристиками малих вільних коливань механічної системи*.

3. Кожне з головних коливань є гармонійним, але результуюче не є гармонійним. Воно утворюється накладенням одне на друге головних незалежних коливань з різними частотами  $\omega_1$  і  $\omega_2$ .

4. У випадку малого опору розв'язок (4.12) буде матиме вигляд:

$$\begin{cases} q_1 = A_1 e^{-h_1 t} \sin(\omega_1^* t + \varepsilon_1) + A_2 e^{-h_2 t} \sin(\omega_2^* t + \varepsilon_2), \\ q_2 = \mu_1 A_1 e^{-h_1 t} \sin(\omega_1^* t + \varepsilon_1) + \mu_2 A_2 e^{-h_2 t} \sin(\omega_2^* t + \varepsilon_2), \end{cases} \quad (4.13)$$

де  $h_1, h_2, \omega_1^*, \omega_2^*$  - дійсні й уявні частини комплексних коренів частотного рівняння вигляду (4.8). Таким чином, малі коливання при наявності опору будуть затухаючими.

## 4.2. Вимушені коливання системи з двома степенями вільності

Припустимо, що до консервативної системи, яка рухається поблизу положення стійкої рівноваги, прикладені збурюючі сили  $\bar{F}_i(t)$ . Нехай відповідні їм узагальнені збурюючі сили є гармонійними, мають однакову колову частоту  $\omega_B$ , але різні амплітуди  $H_1$  і  $H_2$ :

$$\begin{cases} Q_{1F} = H_1 \sin \omega_B t, \\ Q_{2F} = H_2 \sin \omega_B t. \end{cases} \quad (4.14)$$

Складаючи рівняння Лагранжа другого роду, отримаємо диференціальні рівняння руху системи, ліві частини яких є рівняннями (4.4):

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = H_1 \sin \omega_B t, \\ a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{12}q_1 + c_{22}q_2 = H_2 \sin \omega_B t. \end{cases} \quad (4.15)$$

Рівняння (4.15) називаються *диференціальними рівняннями малих вимушених коливань механічної системи з двома степенями вільності навколо положення стійкої рівноваги*. Це – система двох звичайних лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами.

Загальний розв’язок системи (4.15) складається із загального розв’язку (4.12) відповідної однорідної системи рівнянь і частинного розв’язку даної неоднорідної системи. Будемо шукати частинний розв’язок у вигляді

$$q_{1B} = A_{1B} \sin \omega_B t, \quad q_{2B} = A_{2B} \sin \omega_B t. \quad (4.16)$$

Підставляючи функції (4.16) і їх другі похідні за часом у систему (4.15) і скорочуючи на множник  $\sin \omega_B t$ , отримаємо систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} (c_{11} - a_{11}\omega_B^2)A_{1B} + (c_{12} - a_{12}\omega_B^2)A_{2B} = H_1, \\ (c_{12} - a_{12}\omega_B^2)A_{1B} + (c_{22} - a_{22}\omega_B^2)A_{2B} = H_2. \end{cases} \quad (4.17)$$

Розв’язок неоднорідної системи алгебраїчних рівнянь має вигляд:

$$A_{1B} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad A_{2B} = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

де  $\Delta$  — визначник системи (4.17),  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  — визначники, в яких відповідно перший і другий стовпці замінені на стовпець правої частини системи (4.17). Розкриваючи визначники, отримаємо:

$$\begin{aligned} A_{1B} &= \frac{H_1(c_{22} - a_{22}\omega_B^2) - H_2(c_{12} - a_{12}\omega_B^2)}{(c_{11} - a_{11}\omega_B^2)(c_{22} - a_{22}\omega_B^2) - (c_{12} - a_{12}\omega_B^2)^2}, \\ A_{2B} &= \frac{H_2(c_{11} - a_{11}\omega_B^2) - H_1(c_{12} - a_{12}\omega_B^2)}{(c_{11} - a_{11}\omega_B^2)(c_{22} - a_{22}\omega_B^2) - (c_{12} - a_{12}\omega_B^2)^2}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Зважаючи на те, що визначник  $\Delta$  є багаточленом відносно  $\omega_B^2$  вигляду (4.8), його коренями будуть власні частоти  $\omega_1$  і  $\omega_2$ . У такому разі визначник  $\Delta$  можна записати у формі

$$\Delta = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(\omega_B^2 - \omega_1^2)(\omega_B^2 - \omega_2^2),$$

а формули (4.18) — у вигляді:

$$\begin{aligned} A_{1B} &= \frac{H_1(c_{22} - a_{22}\omega_B^2) - H_2(c_{12} - a_{12}\omega_B^2)}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(\omega_B^2 - \omega_1^2)(\omega_B^2 - \omega_2^2)}, \\ A_{2B} &= \frac{H_2(c_{11} - a_{11}\omega_B^2) - H_1(c_{12} - a_{12}\omega_B^2)}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(\omega_B^2 - \omega_1^2)(\omega_B^2 - \omega_2^2)}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Тоді з урахування (4.12) і (4.19) загальний розв'язок системи (4.15) буде:

$$\begin{cases} q_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2) + \\ \quad + \frac{H_1(c_{22} - a_{22}\omega_B^2) - H_2(c_{12} - a_{12}\omega_B^2)}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(\omega_B^2 - \omega_1^2)(\omega_B^2 - \omega_2^2)} \cdot \sin \omega_B t, \\ q_2 = \mu_1 A_1 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1) + \mu_2 A_2 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2) + \\ \quad + \frac{H_2(c_{11} - a_{11}\omega_B^2) - H_1(c_{12} - a_{12}\omega_B^2)}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(\omega_B^2 - \omega_1^2)(\omega_B^2 - \omega_2^2)} \cdot \sin \omega_B t. \end{cases} \quad (4.20)$$

Рівняння (4.20) є *рівняннями малих вимушених коливань системи з двома степенями вільності навколо положення стійкої рівноваги*.

Проаналізуємо *властивості вимушених коливань*.

1. Перші два доданки у рівняннях системи (4.20) описують власні коливання, що відбуваються з частотами  $\omega_1$  і  $\omega_2$ . Власні частоти  $\omega_1, \omega_2$ , а також коефіцієнти форми  $\mu_1, \mu_2$  не залежать від початкових умов, а визначаються тільки параметрами механічної системи. Амплітуди  $A_1, A_2$  і початкові фази  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  визначаються за допомогою початкових умов, тобто залежать від них.

2. Останні доданки в рівняннях системи (4.20) описують чисто вимушені коливання, що відбуваються з частотою збурюючих сил  $\omega_B$ . Амплітуди вимушених коливань  $A_{1B}, A_{2B}$  не залежать від початкових умов, а визначаються параметрами механічної системи і збурюючих сил. При  $\omega_B = \omega_1$  або  $\omega_B = \omega_2$  амплітуди вимушених коливань необмежено зростають, тобто виникає явище *резонансу*.

### 4.3. Динамічний гаситель коливань

Розглянемо випадок, коли одна із збурюючих сил дорівнює нулю:  $Q_{2F} = 0$  (тобто  $H_2 = 0$ ). У цьому разі формули (4.18) приймуть вигляд:

$$\begin{aligned} A_{1B} &= \frac{H_1(c_{22} - a_{22}\omega_B^2)}{(c_{11} - a_{11}\omega_B^2)(c_{22} - a_{22}\omega_B^2) - (c_{12} - a_{12}\omega_B^2)^2}, \\ A_{2B} &= \frac{-H_1(c_{12} - a_{12}\omega_B^2)}{(c_{11} - a_{11}\omega_B^2)(c_{22} - a_{22}\omega_B^2) - (c_{12} - a_{12}\omega_B^2)^2}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Якщо буде виконуватись рівність  $c_{22} - a_{22}\omega_B^2 = 0$ , тобто при

$$\omega_B^2 = \frac{c_{22}}{a_{22}}, \quad (4.22)$$

формули для амплітуд вимушених коливань (4.21) матимуть вигляд

$$A_{1B} = 0,$$

$$A_{2B} = \frac{-H_1(c_{12} - a_{12}\omega_B^2)}{(c_{11} - a_{11}\omega_B^2) \cdot 0 - (c_{12} - a_{12}\omega_B^2)^2} = \frac{H_1}{c_{12} - a_{12}\omega_B^2}. \quad (4.23)$$

*Проаналізуємо отримані результати.*

При виконанні умови (4.22) вимушені коливання, що відповідають першій узагальненій координаті, *погашаються* ( $A_{1B} = 0$ ).

На цьому принципі заснована теорія **динамічних гасителів коливань**: якщо до тіла з пружною в'яззю (системи з одним степенем вільності), яке здійснює вимушені коливання в області резонансу (тобто при  $\omega_B \approx \omega$ ), приєднати інше тіло з пружною в'яззю і підібрати його параметри так, щоб виконувалась умова (4.22), то вимушені коливання першого тіла повністю погашаються.

Розглянемо **розрахунок динамічного гасителя коливань.**

Нехай вантаж маси  $m_1$ , який зв'язаний з нерухомою опорою пружиною жорсткості  $c_1$ , здійснює вимушені коливання під дією збурюючої сили  $Q_{1F} = H_1 \sin \omega_B t$  в зоні резонансу (рис. 4.1).

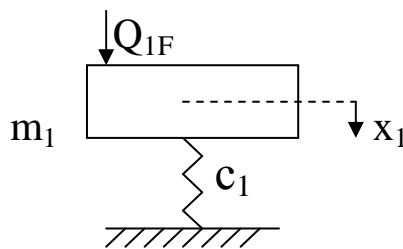


Рис 4.1.

Приєднаємо далі до системи додатковий вантаж маси  $m_2$  за допомогою пружини жорсткості  $c_2$  (рис. 4.2). При цьому отримаємо консервативну систему з двома степенями вільності.

Положення вантажів будемо визначати за допомогою декартових координат ( $q_1 = x_1, q_2 = x_2$ ), які

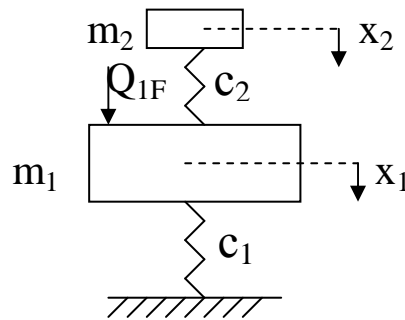


Рис 4.2.

відлічуються від положень рівноваги вантажів. Кінетична енергія такої системи буде:

$$T = \frac{1}{2}(m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2).$$

Порівнюючи цей вираз з формулою (4.1), зробимо висновок, що для даної задачі узагальнені коефіцієнти інерції будуть:

$$a_{11} = m_1, a_{12} = 0, a_{22} = m_2.$$

Потенціальна енергія даної системи має вигляд

$$\Pi = \frac{1}{2}[(c_1 + c_2)x_1^2 - 2c_2x_1x_2 + c_2x_2^2].$$

Порівнюючи останній вираз з формулою (4.2), отримаємо співвідношення для узагальнених коефіцієнтів жорсткості:

$$c_{11} = c_1 + c_2, c_{12} = -c_2, c_{22} = c_2.$$

Тоді умовою гасіння коливань першого вантажу (4.22) буде співвідношення

$$\omega_B^2 = \frac{c_2}{m_2}. \quad (4.24)$$

При цьому формули (4.23) для амплітуд вимушених коливань вантажів  $m_1$ ,  $m_2$  матимуть вигляд

$$\begin{aligned} A_{1B} &= 0, \\ A_{2B} &= -\frac{H_1}{c_2}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

а чисто вимушені коливання вантажів (4.16) будуть описуватись рівняннями:

$$\begin{aligned} x_{1B} &= 0, \\ x_{2B} &= -\frac{H_1}{c_2} \cdot \sin \omega_B t. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Співвідношення (4.24) визначає тільки відношення коефіцієнта жорсткості  $c_2$  до маси  $m_2$  другого вантажу. Тому жорсткість  $c_2$  підбирають так, щоб амплітуда вимушених коливань другого вантажу була не дуже великою, тобто не перевищувала певного значення  $A_{\text{задане}}$ :

$$|A_{2B}| = \frac{H_1}{c_2} \leq A_{\text{задане}}. \quad (4.27)$$

**Фізична сутність гасіння коливань:** при збільшенні за часом збурюючої сили в напрямку першої узагальненої координати  $x_1$  другий вантаж переміщується в протилежному напрямку (про це свідчить знак «-» в формулі (4.26)) і створює пружну силу другої пружини, що компенсує збурюючу силу. В цьому випадку перший вантаж у вимушених коливаннях участі не бере, а здійснює тільки вільні коливання, які з часом затухають.

**Зауваження.** Якщо умова (4.24) не виконується, механічна система стає звичайною системою з двома степенями вільності і має дві власні частоти. При цьому виникає небезпека двох нових резонансних режимів, якщо частота збурюючої сили змінюється у широких межах. Тому динамічний гаситель коливань можна застосовувати в досить стабільних системах (наприклад, в турбогенераторах). Якщо частота збурювання змінюється у широких межах (наприклад, в поршневих компресорах, двигунах внутрішнього згорання і т.п.), потрібно сконструювати динамічний гаситель із затуханням. У такому разі нові резонансні режими не будуть небезпечними.





панелей). Використовують і комбіновані поглиначі. Наприклад, для гасіння сейсмічних коливань деяких висотних споруд Сан-Франциско і Лос-Анджелеса у вертикальні панелі частини поверхів вмонтовані стержневі діафрагми і гідравлічні демпфери.

2. *Віброізоляція* - спосіб зменшення вимушених коливань механічної системи, що базується на послабленні її зв'язку з іншими системами. Виділяють *силову* (активну) і *кінематичну* (пасивну) віброізоляції. У першому випадку ізолюється основа споруди (фундамент, елемент покриття тощо) від джерела вібрацій (наприклад, незрівноважений двигун агрегата). При цьому намагаються, щоб сила, яка передається на основу від джерела вібрацій, була якомога меншою. У другому випадку ізолюється об'єкт (машина, устаткування, апаратура, робоче місце оператора тощо) від вібрації основи, що може виникнути під час транспортування, від коливань машин, які працюють поруч, а також у разі від сейсмічних коливань, що передаються через ґрунт. У цьому разі завдання полягає в зменшенні амплітуди коливань об'єкта.

Конструктивно віброізолятори можуть бути пружинними (зі сталевих звитих пружин), гумовими (які одночасно володіють пружними і в'язкими властивостями), ресорного типу (металеві пружні пластини), комбінованими (пружинно-гумовими). Часто віброізолятори використовують з демпферами в'язкого тертя. Цікавим прикладом використання віброізоляторів у сучасному будівництві було встановлення на початку ХХІ ст. фундаментів ряду висотних споруд Сан-Франциско на гумово-металеві опори для зменшення впливу сейсмічних коливань ґрунту.

3. *Динамічне гасіння коливань* - спосіб зменшення або повного гасіння вимушених коливань механічної системи, заснований на приєднанні до цієї системи додаткової маси. Цей спосіб є ефективним при збуренні сталої чи мало змінної частоти або в поєднанні з демпферами. На практиці використовують пружні гасителі (вантаж на пружині, сталевий пружний лист), маятникові, ударні. Наприклад, на верхньому поверсі збудованого на

початку ХХІ ст. найвищого у світі будинку “Тайпей-101” (заввишки 509 м) встановлений маятниковий гаситель коливань, що виникають під дією вітру, вагою 700 тонн.

4. *Гасіння коливань за рахунок послаблення взаємного впливу джерел вібрації.* При роботі декількох потужних механізмів у виробничих спорудах (швейний, ковальський цехи, компресорні станції тощо) на каркаси цих споруд, а також через фундаменти на ґрунт можуть передаватися значні коливання, якщо вібрації певного механізму посилюються вібраціями інших механізмів. Мали місце випадки, коли вібрації квартир житлового будинку, що знаходився майже в кілометрі від компресорної станції, перевищували допустимий санітарний рівень в декілька разів, а вібрація будинку АТС, що знаходилась неподалік від ковальського цеху, призводила до скидання контактів реле і нестабільності телефонного зв’язку. Відмічений випадок появи тріщин у стінах будівлі в результаті значних вібрацій, що виникли при пуску нового швейного цеху.

Послабити взаємний вплив вібрацій можна або за допомогою раціонального розміщення механізмів, або за допомогою пристроїв, які регулюють початкові фази роботи елементів механізмів так, що відбувається взаємне гасіння коливань.

### III. МАЛІ КОЛИВАННЯ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

У цій частині розглядаються пружні тіла, масові й деформаційні характеристики яких розподілені неперервно. До подібних тіл відносяться такі елементи конструкцій, як стержні, вали, канати, балки, прості рами, кільця, арки, пластини, оболонки тощо.

Найпростішими системами з розподіленими параметрами є прямі *стержні* - пружні тіла, два розміри яких (ширина і висота) малі у порівнянні з третім (довжиною).

Пружне тіло можна розглядати як механічну систему, що складається з нескінченної кількості точок, між якими діють сили пружності. Для визначення положення такої системи необхідне нескінченне число координат, тобто вона має нескінченне число степенів вільності і, як наслідок, нескінченне число власних частот і форм коливань.

*Основні допущення:*

- 1) матеріал тіла пружний, однорідний і ізотропний;
- 2) коливання малі, тобто переміщення точок тіла малі в порівнянні з його геометричними розмірами. При цьому для тіла виконується закон Гука (напруження пропорційні деформаціям, тобто є лінійними функціями деформацій);
- 3) у недеформованому стані вісь стержня прямолінійна;
- 4) справедлива гіпотеза плоских перерізів: прямий елемент стержня, перпендикулярний до його осі до деформації, залишається прямим і перпендикулярним до осі стержня після деформації і його довжина не змінюється.

## 5. Поздовжні коливання прямих стержнів (балок)

Розглянемо прямолінійний однорідний стержень постійного поперечного перерізу, який здійснює поздовжні коливання.

### 5.1. Диференціальне рівняння руху елемента стержня при вільних коливаннях

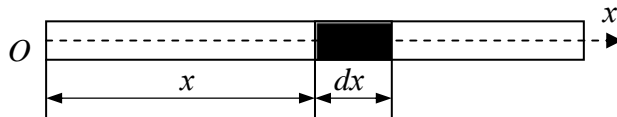


Рис. 5.1

Розглянемо елемент стержня нескінченно малої довжини  $dx$ , положення якого на осі стержня визначається координатою  $x$  (рис.5.1).

Позначимо  $u$  - поздовжнє переміщення перерізу стержня при коливаннях, яке залежить від розташування перерізу (координати  $x$ ) і часу  $t$ :

$$u = u(x, t).$$

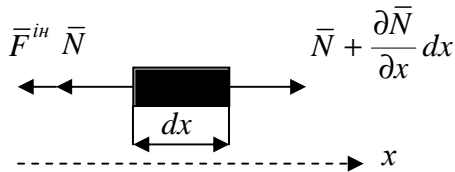


Рис. 5.2

Розглянемо сили, що прикладені до елемента стержня при коливаннях, і застосуємо принцип Даламбера в проекції на вісь  $Ox$  (рис.5.2):

$$-N + (N + \frac{\partial N}{\partial x} dx) - F^{in} = 0, \quad (5.1)$$

де  $N$  - поздовжня сила в перерізі з координатою  $x$ ,  $F^{in}$  - сила інерції.

Як відомо, модуль сили інерції дорівнює добутку маси елемента стержня  $\rho F dx$  (де  $\rho$  - густина матеріалу стержня;  $F$  - площа його поперечного

перерізу) на його прискорення  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ . Тоді після скорочення на  $N$  і

підстановки модуля сили інерції рівняння (5.1) набуде вигляду

$$\frac{\partial N}{\partial x} dx - \rho F dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Відкинемо далі в отриманому рівнянні спільний множник  $dx$  і перенесемо другий доданок в праву частину рівняння:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (5.2)$$

Згідно із законом Гука поздовжня сила

$$N = EF \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (5.3)$$

де  $E$  - модуль пружності першого роду.

У подальшому будемо розглядати стержні сталого перерізу ( $F = \text{const}$ ). Після підстановки (5.3) в (5.2) і скорочення на спільний множник  $F$ , отримаємо:

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Позначивши

$$a^2 = \frac{E}{\rho}, \quad (5.4)$$

одержимо *диференціальне рівняння вільних поздовжніх коливань прямого стержня сталого перерізу*:

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (5.5)$$

## 5.2. Розв'язання диференціального рівняння вільних поздовжніх коливань стержня

Відповідно до методу Фур'є, шукаємо розв'язок диференціального рівняння (5.5) у вигляді добутку функцій, кожна з яких залежить тільки від однієї змінної:

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t). \quad (5.6)$$

Підставляючи (5.6) у (5.5), одержимо

$$a^2 T(t) \cdot \frac{d^2 X(x)}{dx^2} - X(x) \cdot \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = 0.$$

Позначаючи похідні

$$X'' = \frac{d^2 X(x)}{dx^2}, \quad \ddot{T} = \frac{d^2 T(t)}{dt^2}$$

і розділяючи змінні, маємо:

$$\frac{\ddot{T}}{T} = a^2 \frac{X''}{X}. \quad (5.7)$$

Оскільки ліва частина (5.7) залежить тільки від часу  $t$ , а права - від координати  $x$ , рівність можлива лише в тому випадку, коли ліва і права частини (5.7) дорівнюють константі. Позначивши цю константу  $\omega^2$  (можна довести [1], що ця константа від'ємна), (5.7) можна записати у вигляді

$$\frac{\ddot{T}}{T} = a^2 \frac{X''}{X} = -\omega^2,$$

що еквівалентно двом звичайним диференціальним рівнянням

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0, \quad (5.8)$$

$$X'' + k^2 X = 0, \quad (5.9)$$

$$\text{де} \quad k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}. \quad (5.10)$$

Розв'язки диференціальних рівнянь (5.8), (5.9), як відомо [3], мають вигляд

$$T(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (5.11)$$

$$X(x) = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx. \quad (5.12)$$

У рівняннях (5.11) і (5.12) коефіцієнти  $A$ ,  $B$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  - сталі інтегрування.

Як видно з рівняння (5.11), параметр  $\omega$  є **власною частотою** поздовжніх коливань стержня, а функція  $X(x)$  (рівняння (5.12)), що

залежить від координати  $x$  і визначає розподіл амплітуд переміщень точок осі стержня, **власною формою** поздовжніх коливань стержня.

Власну форму  $X(x)$  визначають так, щоб задовольнити умовам закріплення на кінцях стержня. Ці умови називаються **граничними**. Для кожного кінця стержня (при  $x = 0$  і  $x = l$ , де  $l$  - довжина стержня) складають по одній умові, всього їх буде дві. Після підстановки функції (5.12) і її похідних у граничні умови вийде однорідна система двох рівнянь щодо сталих  $C_1, C_2$ . Умовою існування ненульового розв'язку для  $C_1, C_2$  буде рівність нулю визначника цієї системи, що залежатиме тільки від параметра  $\omega$ :

$$\Delta(\omega) = 0. \quad (5.13)$$

Рівняння (5.13) називається **частотним**. Коренями цього рівняння і будуть власні частоти  $\omega_n$ , причому їх число нескінченне:  $n = 1, 2, \dots, \infty$ .

Далі, із системи рівнянь відносно  $C_1, C_2$  одну із сталих інтегрування можна виразити через іншу (наприклад,  $C_2$  через  $C_1$ ) і записати вираз для власної форми  $X_n(x)$ , що відповідає власній частоті  $\omega_n$ .

Загальний розв'язок диференціального рівняння (5.5) виходить як лінійна комбінація розв'язків вигляду (5.6) усієї множини  $n$  частот  $\omega_n$ :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t), \quad (5.14)$$

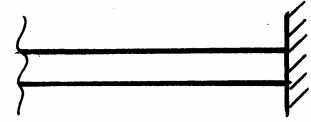
де сталі  $A_n, B_n$  визначаються з початкових умов  $u(x, 0)$  і  $\dot{u}(x, 0)$ . Рівняння (5.14) є **рівнянням вільних поздовжніх коливань стержня**.

### 5.3. Граничні умови

Розглянемо кілька можливих випадків закріплення одного з кінців стержня (який має координату  $x = 0$  або  $x = l$ ).



### 1. Защемлений кінець



На защемленому кінці дорівнює нулю переміщення  $u$  :

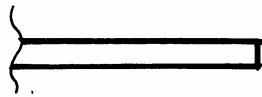
$$u = 0. \quad (5.15)$$

Оскільки  $u = T(t) \cdot X(x)$ , а функція  $T(t)$  у загальному випадку не дорівнює 0 для будь-якого значення координати  $x$ , то рівняння (5.15) можна записати у вигляді

$$X = 0. \quad (5.16)$$

Рівняння (5.16) виражає граничну умову на защемленому кінці стержня.

### 2. Вільний кінець



На вільному кінці дорівнює нулю поздовжня сила  $N$ :

$$N = 0. \quad (5.17)$$

Оскільки  $N = EF \frac{\partial u}{\partial x} = EF \cdot T(t) \cdot X^I(x)$ , рівняння (5.17) набуде вигляду

$$X^I = 0. \quad (5.18)$$

Рівняння (5.18) виражає граничну умову на вільному кінці стержня.

## 5.4. Приклади розрахунку поздовжніх коливань пружного стержня

### Приклад 1.

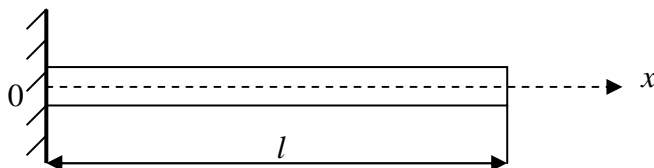


Рис. 5.3

Визначити перші три власні частоти і побудувати власні форми поздовжніх коливань сталевого консольного стержня довжиною  $l$  (рис. 5.3).

Значення параметрів:  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па;  $\rho = 8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;  $l = 8$  м.

### Розв'язання

Запишемо граничні умови для даного прикладу, використовуючи формули (5.16), (5.18) для поздовжнього переміщення при  $x = 0$  і  $x = l$  :

$$X(0) = 0; \quad X^I(l) = 0. \quad (5.19)$$

Щоб скористатися граничними умовами, знайдемо першу похідну функції (5.12) за координатою  $x$ :

$$(\cos kx)' = -k \cdot \sin kx; \quad (\sin kx)' = k \cdot \cos kx;$$

$$X^I(x) = k(-C_1 \sin kx + C_2 \cos kx). \quad (5.20)$$

Підставимо (5.12) і (5.20) в рівняння граничних умов (5.19), вважаючи, що  $\cos 0 = 1$ ;  $\sin 0 = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} X(0) &= 0; \quad C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0; \\ X^I(l) &= 0; \quad k(-C_1 \sin kl + C_2 \cos kl) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

Система однорідних рівнянь (5.21) має відмінний від нуля розв'язок тільки у випадку рівності нулю визначника цієї системи:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\sin kl & \cos kl \end{vmatrix} = 0. \quad (5.22)$$

Розкриваючи визначник, одержимо

$$\cos kl = 0. \quad (5.23)$$

Рівняння (5.23) буде частотним рівнянням даної задачі.

Корені рівняння (5.23):

$$k_n l = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot n = \frac{2n-1}{2} \pi \quad (n = 1, \dots, \infty).$$

Тоді

$$k_n = \frac{\pi \cdot (2n-1)}{2l}. \quad (5.24)$$

З огляду на формули (5.4), (5.10) одержимо вираз для власних частот:

$$\omega_n = k_n \cdot a = \frac{\pi}{l} \cdot \frac{(2n-1)}{2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (n = 1, \dots, \infty). \quad (5.25)$$

Тоді перші три власні частоти будуть:

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l} \cdot \frac{(2 \cdot 1 - 1)}{2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \approx \frac{3,14}{8} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{11}}{8 \cdot 10^3}} = \frac{3,14}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot 10^4 \approx 981 \left( \frac{\text{рад}}{\text{с}} \right);$$

$$\omega_2 = \frac{\pi}{l} \cdot \frac{(2 \cdot 2 - 1)}{2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \approx \frac{3,14}{8} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{11}}{8 \cdot 10^3}} = \frac{3,14}{8} \cdot \frac{3}{4} \cdot 10^4 \approx 2943 \left( \frac{\text{рад}}{\text{с}} \right);$$

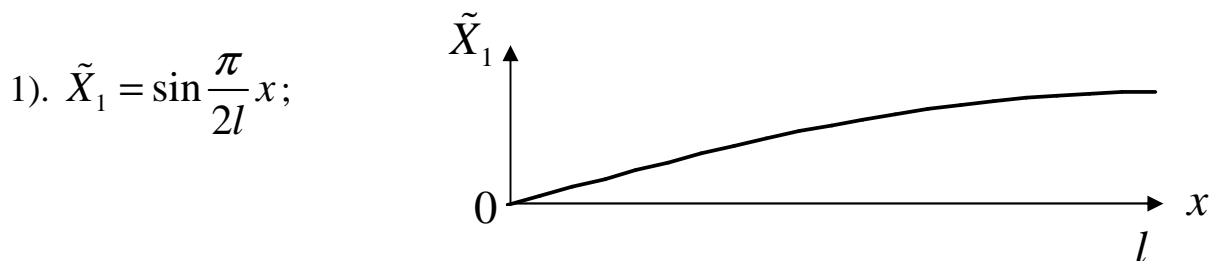
$$\omega_3 = \frac{\pi}{l} \cdot \frac{(2 \cdot 3 - 1)}{2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \approx \frac{3,14}{8} \cdot \frac{5}{2} \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{11}}{8 \cdot 10^3}} = \frac{3,14}{8} \cdot \frac{5}{4} \cdot 10^4 \approx 4905 \left( \frac{\text{рад}}{\text{с}} \right);$$

Тепер визначимо власні форми. З огляду на рівність нулю сталої  $C_1$  з першого з рівнянь (5.21) вираз (5.12) для *власних форм* у даному прикладі набуде вигляду

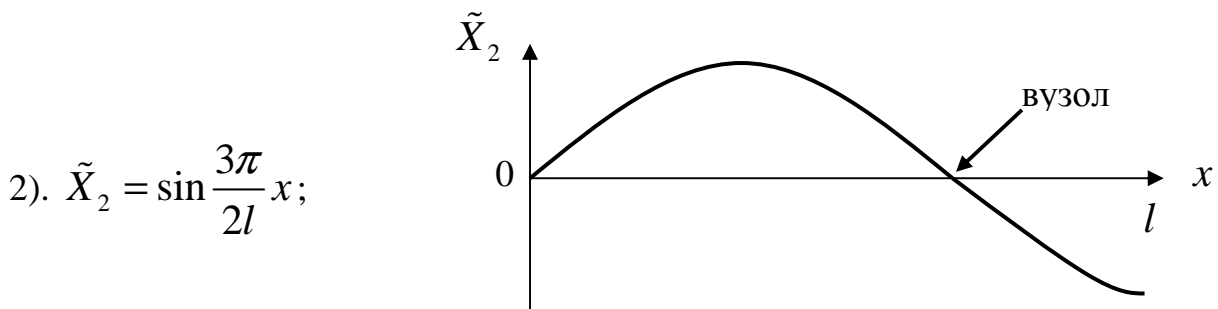
$$X_n(x) = C_{2n} \sin k_n x = C_{2n} \sin \left[ \frac{\pi \cdot (2n - 1)}{2l} \cdot x \right], \quad (n = 1, \dots, \infty). \quad (5.26)$$

Задаючи в рівнянні (5.26) координату  $x$ , можна обчислити (з точністю до сталої  $C_{2n}$ ) значення власної форми  $\tilde{X}_n(x) = X_n(x)/C_{2n}$  і побудувати графік  $\tilde{X}_n(x)$ .

Вирази і графіки (графіки будують для функцій  $\tilde{X}_n(x)$ ) для перших трьох власних форм матимуть вигляд (рис. 5.4):

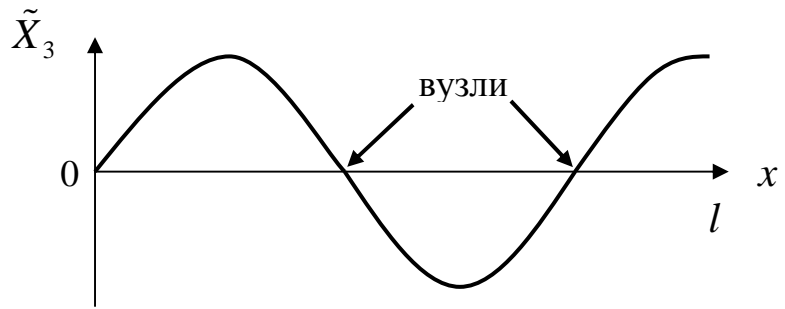


а) - перша власна форма (безвузлова)



б) - друга власна форма (одновузлова)

$$3). \tilde{X}_3 = \sin \frac{5\pi}{2l} x;$$



в) - третя власна форма (двовузлова)

Рис. 5.4 – Форми власних поздовжніх коливань стержня

**Відповідь:**  $\omega_1 \approx 981 \frac{\text{рад}}{\text{с}}; \quad \omega_2 \approx 2943 \frac{\text{рад}}{\text{с}}; \quad \omega_3 \approx 4905 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$

З наведених розрахунків випливає, що нижчій власній частоті  $\omega_1$  відповідає безвузлова форма коливань стержня, при якій всі точки стержня одночасно проходять через положення рівноваги й одночасно досягають максимального відхилення від нього. Зі збільшенням номера власної частоти зростає число **вузлових точок**, які при поздовжніх коливаннях стержня залишаються нерухомими.

### Приклад 2.

Визначити рівняння поздовжніх коливань стержня сталого перерізу  $F$ , що розглянутий у прикладі 1 (рис. 5.3), при наступних граничних і початкових умовах:

$$u(0, t) = 0 \quad (\text{лівий кінець стержня защемлений}),$$

$$u'(l, t) = 0 \quad (\text{правий кінець стержня вільний}),$$

$$u(x, 0) = \frac{Px}{EF} = \varepsilon_0 x \quad (\text{стержень був розтягнутий прикладеною на}$$

правому кінці поздовжньою силою  $P = EF\varepsilon_0$ , яка в деякий момент

раптово відбирається, де  $\varepsilon_0 = \frac{P}{EF}$  - початкова деформація стержня

на правому кінці),

$$\dot{u}(x, 0) = 0 \quad (\text{стержень відпускають без початкової швидкості}).$$

### Розв'язання

Розв'язок рівняння (5.5) отримаємо методом двомірного перетворення Лапласа теорії операційного числення, що розглянуто в роботах [13, 14].

В області перетворень будемо мати

$$U(s, p) = -c_1^2 \varepsilon_0 p \frac{1}{s^2(s^2 - c_2^2)} + \left( \frac{c_1^2 \varepsilon_0 p}{c_2^2} - \frac{c_1^2 \varepsilon_0 p}{c_2^2} \cdot \frac{1}{ch(c_2 l)} \right) \cdot \frac{1}{(s^2 - c_2^2)},$$

де  $s, p$  - оператори перетворення Лапласа,  $c_1^2 = 1/a^2$ ,  $c_2^2 = c_1^2 p^2$ .

В області оригіналів буде

$$u(x, t) = \frac{8\varepsilon_0 l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin\left(\frac{2n-1}{2} \frac{\pi}{l} x\right) \cos\left(\frac{2n-1}{2} \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} t\right) \right].$$

Останнє рівняння є рівнянням позовжніх коливань стержня при заданих граничних і початкових умовах.

**Перевірка.** При  $t = 0$ ,  $x = l$ , враховуючи, що  $\sin\left(\frac{2n-1}{2} \pi\right) = (-1)^{n-1}$ , а

ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ , отримаємо

$$u(l, 0) = \frac{8\varepsilon_0 l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^{n-1} \cdot (-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \right] = \frac{8\varepsilon_0 l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(2n-1)^2} \right] = \frac{8\varepsilon_0 l}{\pi^2} \frac{\pi^2}{8} = \varepsilon_0 l.$$

Останній вираз відповідає заданим початковим умовам на правому кінці стержня.

## 6. Поперечні коливання прямих стержнів (балок)

Розглянемо прямолінійний однорідний стержень сталого поперечного перерізу. Окрім основних допущень, сформульованих на початку частини III, будемо також вважати, що при малих коливаннях поперечні переміщення точок стержня відбуваються перпендикулярно до його осі.

### 6.1. Диференціальне рівняння руху елемента стержня

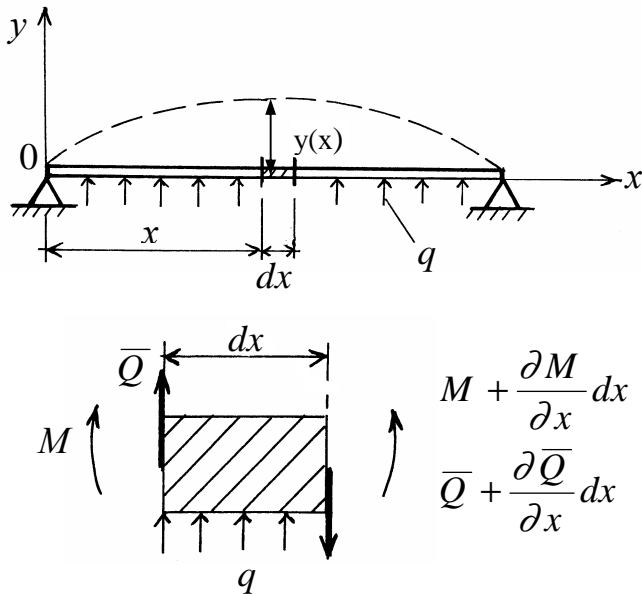


Рис. 6.1

Розглянемо елемент стержня нескінченно малої довжини  $dx$ , положення якого на осі стержня визначається координатою  $x$  (рис.6.1), де  $q$  – розподілене навантаження;  $\bar{Q}$  – поперечна сила;  $M$  – згинальний момент;  $y(x)$  – прогин стержня (переміщення точки осі стержня з координатою  $x$  у напрямку осі  $Oy$ ).

Як відомо з курсу опору матеріалів, диференціальне рівняння кривої вигину осі стержня має вигляд

$$EJ \frac{d^2 y(x)}{dx^2} = M, \quad (6.1)$$

де  $E$  – модуль пружності;  $J$  – момент інерції поперечного перерізу стержня щодо нейтральної осі ( $z$ ).

Застосовуючи співвідношення між згинальним моментом і інтенсивністю розподіленого навантаження  $q$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = q$$

і підставляючи в нього вираз (6.1), одержимо

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EJ \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = q,$$

або для однорідного стержня сталого поперечного перерізу ( $EJ = \text{const}$  )

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = q. \quad (6.2)$$

При поперечних коливаннях стержня прогин буде функцією двох змінних (координати  $x$  і часу  $t$ ):

$$y = y(x, t).$$

Застосуємо для елемента стержня довжиною  $dx$  принцип Даламбера, взявши в якості розподіленого навантаження розподілені сили інерції:

$$q = -\rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (6.3)$$

де  $\rho$  - густина матеріалу стержня;  $F$  - площа його поперечного перерізу.

Підставляючи (6.3) у (6.2), одержимо

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

або

$$\frac{EJ}{\rho F} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

Позначаючи

$$a^2 = \frac{EJ}{\rho F}, \quad (6.4)$$

одержимо диференціальне рівняння вільних поперечних коливань елемента стержня:

$$a^2 \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (6.5)$$

## 6.2. Розв'язання диференціального рівняння вільних поперечних коливань стержня

Відповідно до методу Фур'є, шукаємо розв'язок диференціального рівняння (6.5) у вигляді добутку функцій, кожна з яких залежить тільки від однієї змінної:

$$y(x, t) = Y(x) \cdot T(t). \quad (6.6)$$

Підставляючи (6.6) у (6.5), одержимо

$$a^2 T(t) \cdot \frac{d^4 Y(x)}{dx^4} + Y(x) \cdot \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = 0.$$

Позначаючи похідні

$$Y^{IV} = \frac{d^4 Y(x)}{dx^4}, \quad \ddot{T} = \frac{d^2 T(t)}{dt^2}$$

і розділяючи змінні, маємо:

$$\frac{\ddot{T}}{T} = -a^2 \frac{Y^{IV}}{Y}. \quad (6.7)$$

Оскільки ліва частина (6.7) залежить тільки від часу  $t$ , а права - від координати  $x$ , рівність можлива тільки в тому випадку, коли ліва і права частини (6.7) дорівнюють константі. Позначивши цю константу  $\omega^2$  (можна довести, що константа є від'ємною), (6.7) можна записати у вигляді

$$\frac{\ddot{T}}{T} = -a^2 \frac{Y^{IV}}{Y} = -\omega^2,$$

що еквівалентно двом звичайним диференціальним рівнянням:

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0, \quad (6.8)$$

$$Y^{IV} - k^4 Y = 0, \quad (6.9)$$

$$\text{де } k^4 = \frac{\omega^2}{a^2}. \quad (6.10)$$

Розв'язок диференціального рівняння (6.8), як відомо, має вигляд

$$T(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t. \quad (6.11)$$

Рівнянню (6.9) задовольняють функції  $\cos kx$ ,  $\sin kx$ ,  $ch kx$ ,  $sh kx$ , де



$$ch\ kx = \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} \quad - \quad \text{гіперболічний косинус}; \quad sh\ kx = \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2} \quad -$$

гіперболічний синус, що мають властивість:  $ch^2\ kx - sh^2\ kx = 1$ .

Загальний розв'язок рівняння (6.9) буде лінійною комбінацією цих функцій, яку зручніше записати у вигляді:

$$Y(x) = C_1 (\cos kx + ch\ kx) + C_2 (\cos kx - ch\ kx) + C_3 (\sin kx + sh\ kx) + C_4 (\sin kx - sh\ kx). \quad (6.12)$$

У рівняннях (6.11) і (6.12) коефіцієнти  $A, B, C_1, C_2, C_3, C_4$  - сталі інтегрування.

Як видно з рівняння (6.11), параметр  $\omega$  є **власною частотою** поперечних коливань стержня, а функція  $Y(x)$  (рівняння (6.12)), що залежить від координати  $x$  і визначає розподіл амплітуд переміщень точок осі стержня, - **власною формою** поперечних коливань стержня.

Власну форму  $Y(x)$  визначають так, щоб задовольнити умовам закріплення на кінцях стержня. Ці умови називаються **граничними**. Для кожного кінця стержня (при  $x = 0$  і  $x = l$ , де  $l$  - довжина стержня) складають по дві умови, усього їх буде чотири. Після підстановки функції (6.12) і її похідних у граничні умови вийде однорідна система чотирьох рівнянь щодо сталих  $C_1, C_2, C_3, C_4$ . Умовою існування ненульового розв'язка для  $C_1, C_2, C_3, C_4$  буде рівність нулю визначника цієї системи, що буде залежати тільки від параметра  $\omega$ :

$$\Delta(\omega) = 0. \quad (6.13)$$

Рівняння (6.13) називається **частотним**. Коренями цього рівняння і будуть власні частоти  $\omega_n$ , причому їхнє число нескінченне:  $n = 1, 2, \dots, \infty$ .

Із системи рівнянь відносно  $C_1, C_2, C_3, C_4$  можна всі сталі виразити через якусь одну (наприклад, через  $C_3$ ) і записати вираз для власної форми  $Y_n(x)$ , що відповідає власній частоті  $\omega_n$ .

Загальний розв'язок диференціального рівняння (6.5) виходить як лінійна комбінація розв'язків вигляду (6.6) усієї множини  $n$  частот  $\omega_n$ :

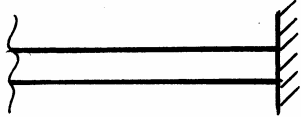
$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x) \cdot T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x) \cdot (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t), \quad (6.14)$$

де сталі  $A_n, B_n$  (у які відносять і сталу  $C_k$ , що залишилась) визначаються з початкових умов  $y(x, 0)$  і  $\dot{y}(x, 0)$ . Рівняння (6.14) є **рівнянням вільних поперечних коливань стержня**.

### 6.3. Граничні умови

Розглянемо кілька можливих випадків закріплення одного з кінців стержня (який має координату  $x = 0$  або  $x = l$ ).

#### 1. Защемлений кінець.



На защемленому кінці дорівнюють нулю прогин  $y$  і кут повороту осі стержня  $\theta$ :

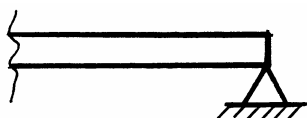
$$\begin{cases} y = 0, \\ \theta = 0. \end{cases} \quad (6.15)$$

Враховуючи, що  $y = T(t) \cdot Y(x)$ ,  $\theta = \frac{\partial y}{\partial x} = T(t) \cdot Y'(x)$ , а функція  $T(t)$  у загальному випадку не дорівнює 0 для будь-якого значення координати  $x$ , рівняння (6.15) можна записати у вигляді

$$\begin{cases} Y = 0, \\ Y' = 0. \end{cases} \quad (6.16)$$

Рівняння (6.16) виражають *граничні умови на защемленому кінці стержня*.

#### 2. Шарнірно (вільно) опертий кінець.



У цьому випадку на кінці стержня дорівнюють нулю прогин  $y$  і згинальний момент  $M$ :

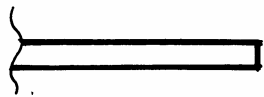
$$\begin{cases} y = 0, \\ M = 0. \end{cases} \quad (6.17)$$

Оскільки  $M = EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = EJ \cdot T(t) \cdot Y''(x)$ , рівняння (6.17) можна записати у вигляді

$$\begin{cases} Y = 0, \\ Y'' = 0. \end{cases} \quad (6.18)$$

Рівняння (6.18) виражають *граничні умови на шарнірно обпертому кінці стержня*.

### 3. Вільний кінець.



На вільному кінці дорівнюють нулю згинальний момент  $M$  и поперечна сила  $Q$ :

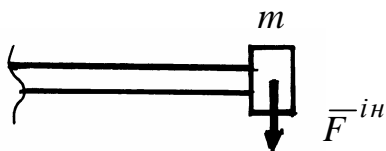
$$\begin{cases} M = 0, \\ Q = 0. \end{cases} \quad (6.19)$$

Тому що  $Q = \frac{\partial M}{\partial x} = EJ \cdot T(t) \cdot Y'''(x)$ , рівняння (6.19) приймуть вигляд

$$\begin{cases} Y'' = 0, \\ Y''' = 0. \end{cases} \quad (6.20)$$

Рівняння (6.20) виражають *граничні умови на вільному кінці стержня*.

### 4. На кінці стержня точковий вантаж маси $m$ .



У цьому випадку дорівнює нулю згинальний момент  $M$ , а поперечна сила  $Q$  дорівнює силі інерції вантажу:

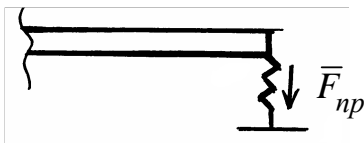
$$\begin{cases} M = 0, \\ Q = F^{in}. \end{cases} \quad (6.21)$$

Оскільки  $F^{in} = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = mY(x)\ddot{T}(t) = -mY(x)\omega^2 T(t)$ , рівняння (6.21) запишуться у вигляді

$$\begin{cases} Y'' = 0, \\ EJY''' = -m\omega^2 Y. \end{cases} \quad (6.22)$$

Рівняння (6.22) виражають *граничні умови для правого кінця стержня з розташованої на ньому зосередженою масою* (при розташуванні маси на лівому кінці в другому рівнянні зміниться знак:  $EJY''' = m\omega^2 Y$ ).

#### 5. Пружно обпертий кінець стержня.



На пружно обпертому кінці стержня дорівнює нулю згинальний момент  $M$ , а поперечна сила  $Q$  дорівнює реакції опори ( силі пружності  $F_{пр}$ ):

$$\begin{cases} M = 0, \\ Q = F_{пр}. \end{cases} \quad (6.23)$$

Тому що  $F_{пр} = c \cdot y = c \cdot T(t) \cdot Y(x)$ , рівняння (6.23) приймуть вигляд

$$\begin{cases} Y'' = 0, \\ EJY''' = cY. \end{cases} \quad (6.24)$$

Рівняння (6.24) виражають *граничні умови на пружно обпертому правому кінці стержня* (при розташуванні пружної в'язі на лівому кінці в другому рівнянні зміниться знак:  $EJY''' = -cY$ ).

### 6.4. Приклад розрахунку власних частот і форм поперечних коливань пружного стержня

#### Постановка задачі:

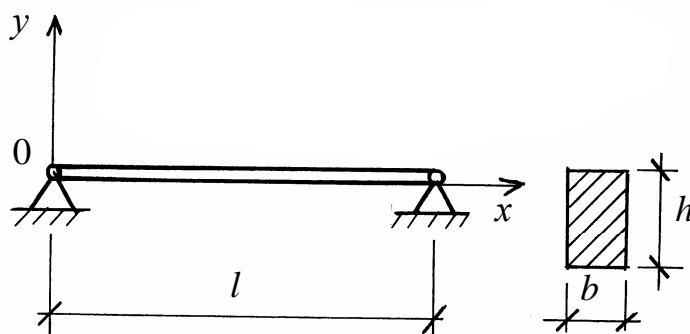


Рис. 6.2

Визначити перші три власні частоти і побудувати власні форми поперечних коливань сталевго стержня довжиною  $l$  із шарнірно обпертими кінцями (рис. 6.2).

Стержень має прямокутний поперечний переріз:

$$J = \frac{bh^3}{12}. \quad (6.25)$$

Значення параметрів:  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па;  $\rho = 8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;  $b = 6$  см;  
 $h = 8$  см;  $l = 8$  м.

### ***Розв'язання***

Запишемо граничні умови, використовуючи формули (6.18) для лівого (при  $x = 0$ ) і правого (при  $x = l$ ) кінця стержня:

$$Y(0) = 0; \quad Y''(0) = 0; \quad Y(l) = 0; \quad Y''(l) = 0. \quad (6.26)$$

Щоб скористатися граничними умовами, знайдемо другу похідну функції (6.12) по координаті  $x$ , використовуючи формули для похідних:

$$(\cos kx)' = -k \cdot \sin kx; \quad (\sin kx)' = k \cdot \cos kx;$$

$$(ch kx)' = k \cdot sh kx; \quad (sh kx)' = k \cdot ch kx.$$

$$Y''(x) = k^2 \left[ C_1(-\cos kx + ch kx) + C_2(-\cos kx - ch kx) + \right. \\ \left. + C_3(-\sin kx + sh kx) + C_4(-\sin kx - sh kx) \right]. \quad (6.27)$$

Підставимо (6.12) і (6.27) у перші два рівняння граничних умов (6.26), зважаючи, що  $\cos 0 = 1$ ;  $\sin 0 = 0$ ;  $ch 0 = 1$ ;  $sh 0 = 0$ :

$$Y(0) = 0; \quad \text{або} \quad C_1(1+1) + C_2(1-1) + C_3(0+0) + C_4(0-0) = 0;$$

$$Y''(0) = 0; \quad \text{або} \quad k^2 \left[ C_1(-1+1) + C_2(-1-1) + C_3(-0+0) + C_4(-0-0) \right] = 0.$$

З цієї системи знаходимо  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 0$ .

Запишемо 3-є і 4-е рівняння граничних умов (6.26) з урахуванням знайдених  $C_1$  і  $C_2$ :

$$Y(l) = 0; \quad \text{або} \quad C_3(\sin kl + sh kl) + C_4(\sin kl - sh kl) = 0; \quad (6.28)$$

$$Y''(l) = 0; \quad \text{або} \quad k^2 \left[ C_3(-\sin kl + sh kl) + C_4(-\sin kl - sh kl) \right] = 0.$$

Система однорідних рівнянь (6.28) має відмінний від нуля розв'язок тільки у випадку рівності нулю визначника цієї системи:

$$\begin{vmatrix} \sin kl + sh kl & +\sin kl - sh kl \\ -\sin kl + sh kl & -\sin kl - sh kl \end{vmatrix} = 0. \quad (6.29)$$

Розкриваючи визначник (6.29), одержимо

$$(\sin kl + sh kl) \cdot (-\sin kl - sh kl) - (\sin kl - sh kl) \cdot (-\sin kl + sh kl) = 0,$$

або

$$-(\sin kl + sh kl)^2 + (\sin kl - sh kl)^2 = 0.$$

Розглядаючи останній вираз як різницю квадратів

$$(\sin kl - sh kl + \sin kl + sh kl) \cdot (\sin kl - sh kl - \sin kl - sh kl) = 0,$$

отримаємо рівняння

$$2 \cdot \sin kl \cdot (-2 \cdot sh kl) = 0.$$

Оскільки при  $k \neq 0$  функція  $sh kl \neq 0$ , то мусить виконуватись рівняння

$$\sin kl = 0. \quad (6.30)$$

Рівняння (6.30) і буде остаточним частотним рівнянням даної задачі.

Корені рівняння (6.30):

$$k_n l = \pi \cdot n \quad (n = 1, \dots, \infty).$$

Тоді

$$k_n = \frac{\pi \cdot n}{l}. \quad (6.31)$$

**Примітка.** Корені частотного рівняння для поперечних коливань можна записати у вигляді формули *тільки у випадку шарнірного обпирання двох кінців стержня*. В інших випадках граничних умов корені частотного рівняння можна знайти тільки чисельними методами.

З огляду на формули (6.4), (6.10) одержимо вираз для *власних частот*:

$$\omega_n = k_n^2 \cdot a = k_n^2 \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}}, \quad (n = 1, \dots, \infty). \quad (6.32)$$

У даному прикладі власні частоти можна обчислити з урахуванням формул (6.31) та (6.25):

$$\omega_n = \frac{\pi^2 \cdot n^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}} = \frac{\pi^2 \cdot n^2}{l^2} \sqrt{\frac{E \cdot b \cdot h^3}{12 \cdot \rho \cdot b \cdot h}} = \frac{\pi^2 \cdot n^2}{l^2} \cdot \frac{h}{2} \cdot \sqrt{\frac{E}{3 \cdot \rho}}.$$

Тоді перші три власні частоти будуть:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \frac{h}{2} \sqrt{\frac{E}{3 \cdot \rho}} \approx \frac{10}{64} \cdot \frac{8 \cdot 10^{-2}}{2} \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{11}}{3 \cdot 8 \cdot 10^3}} = \frac{5}{8} \cdot 10^{-2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^4 \sqrt{\frac{1}{3}} = \\ &= 31,25 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} = 31,25 \cdot 0,58 \approx 17,8 \left( \frac{\text{рад}}{\text{с}} \right); \\ \omega_2 &= \frac{\pi^2 \cdot 4}{l^2} \cdot \frac{h}{2} \cdot \sqrt{\frac{E}{3 \cdot \rho}} \approx 71,2 \left( \frac{\text{рад}}{\text{с}} \right); \\ \omega_3 &= \frac{\pi^2 \cdot 9}{l^2} \cdot \frac{h}{2} \cdot \sqrt{\frac{E}{3 \cdot \rho}} \approx 160,3 \left( \frac{\text{рад}}{\text{с}} \right). \end{aligned}$$

Тепер визначимо власні форми. З огляду на рівність нулю сталих  $C_1$  і  $C_2$ , вираз (6.12) для власних форм у даному прикладі прийме вигляд

$$Y_n(x) = C_{3n} (\sin k_n x + sh k_n x) + C_{4n} (\sin k_n x - sh k_n x), \quad (n = 1, \dots, \infty). \quad (6.33)$$

З одного з рівнянь (6.28) можна одну сталу інтегрування виразити через іншу. Наприклад, з другого рівняння (6.28)

$$C_{4n} = C_{3n} \frac{sh kl - \sin kl}{sh kl + \sin kl}. \quad (6.34)$$

Підставляючи (6.34) у (6.33), одержимо вираз для *власних форм*:

$$Y_n(x) = C_{3n} \left[ \sin k_n x + sh k_n x + \frac{sh k_n l - \sin k_n l}{sh k_n l + \sin k_n l} (\sin k_n x - sh k_n x) \right]. \quad (6.35)$$

Задаючи в рівнянні (6.35) значення координати  $x$ , можна обчислити (з точністю до сталої  $C_{3n}$ ) значення власної форми  $\tilde{Y}_n(x) = Y_n(x) / C_{3n}$  і побудувати графік  $\tilde{Y}_n(x)$ .

Тільки у випадку *шарнірного обтірання* двох кінців стержня, як у даному прикладі, рівняння (6.35) можна спростити. Оскільки згідно з (6.30),  $\sin k_n l = 0$ , то

$$\frac{sh k_n l - \sin k_n l}{sh k_n l + \sin k_n l} = \frac{sh k_n l}{sh k_n l} = 1,$$

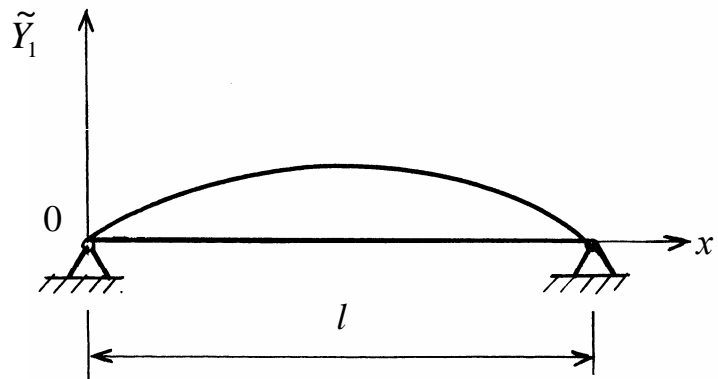
і формула (6.34) прийме вигляд

$$\begin{aligned} Y_n(x) &= C_{3n} [\sin k_n x + sh k_n x + 1 \cdot (\sin k_n x - sh k_n x)] = \\ &= C_{3n} \cdot 2 \sin k_n x = C_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{l}, \end{aligned} \quad (6.36)$$

де  $C_n = 2 \cdot C_{3n}$ .

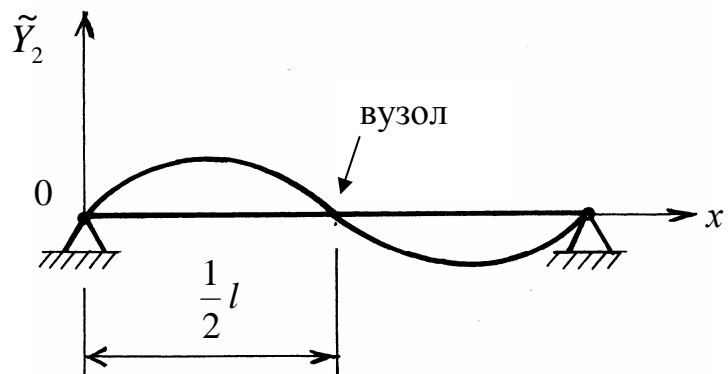
Тоді вирази і графіки (графіки будують для функцій  $\tilde{Y}_n(x)$ ) для перших трьох власних форм матимуть наступний вигляд (рис. 6.3).

1).  $\tilde{Y}_1 = \sin \frac{\pi}{l} x$ ;



а) - перша власна форма (безвузлова)

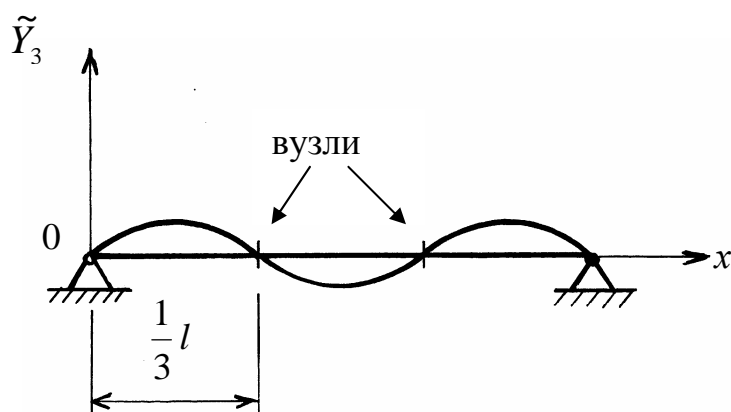
2).  $\tilde{Y}_2 = \sin \frac{2\pi}{l} x$ ;



б) - друга власна форма (одновузлова)



$$3). \tilde{Y}_3 = \sin \frac{3\pi}{l} x;$$



в) - третя власна форма (двовузлова)

Рис. 6.3 - Форми власних поперечних коливань стержня

**Відповідь:**  $\omega_1 \approx 17,8 \frac{\text{рад}}{\text{с}}; \omega_2 \approx 71,2 \frac{\text{рад}}{\text{с}}; \omega_3 \approx 160,3 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$

З наведених розрахунків випливає, що нижчій власній частоті  $\omega_1$  відповідає безвузлова форма коливань стержня, при якій всі точки стержня одночасно проходять через положення рівноваги й одночасно досягають максимального відхилення від нього. Зі збільшенням номера власної частоти зростає число **вузлових точок**, які при поперечних коливаннях стержня залишаються нерухомими.

### 6.5. Вимушені поперечні коливання стержня

При дії на стержень збурюючого поперечного навантаження  $q(x,t)$  диференціальні рівняння руху (6.5) набудуть вигляду

$$a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{q(x,t)}{\rho F}. \quad (6.37)$$

Найбільш загальним способом розв'язання диференціального рівняння (6.37) є спосіб розкладання заданих і шуканих функцій у ряди за власними формами коливань  $Y_n(x)$  відповідної задачі про вільні коливання.

Уявимо поперечне навантаження і прогин у вигляді рядів:

$$q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x) \cdot H_n(t), \quad (6.38)$$

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x) \cdot T_n(t). \quad (6.39)$$

де  $H_n(t)$ ,  $T_n(t)$  - поки що невідомі функції часу.

1). Для визначення  $H_n(t)$  помножимо обидві частини (6.38) на  $Y_n(x)$  і зінтегруємо за координатою  $x$  :

$$\int_0^l q(x, t) Y_n(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^l Y_k(x) Y_n(x) H_k(t) dx. \quad (6.40)$$

Для спрощення правої частини отриманого рівняння врахуємо властивості **ортogonalності власних форм коливань**:

$$\int_0^l Y_k(x) Y_n(x) dx = \begin{cases} = 0, n \neq k \\ \neq 0, n = k \end{cases} \quad (6.41)$$

і той факт, що функція  $H_k(t)$  не залежить від координати  $x$  . Тоді рівняння (6.39) прийме вигляд:

$$\int_0^l q(x, t) Y_n(x) dx = H_n(t) \int_0^l Y_n^2(x) dx,$$

звідки

$$H_n(t) = \frac{\int_0^l q(x, t) Y_n(x) dx}{\int_0^l Y_n^2(x) dx}. \quad (6.42)$$

2). Визначимо функцію  $T_n(t)$ . Враховуючи лінійність задачі, можна довести, що кожний доданок ряду (6.38) викликає рух, який описується відповідним доданком ряду (6.39). Тому диференціальне рівняння (6.37) можна записати у вигляді нескінченної системи рівнянь:

$$a^2 Y_n^{IV}(x) T_n(t) + Y_n(x) \ddot{T}_n(t) = \frac{1}{\rho F} Y_n(x) H_n(t), \quad (n = 1, \dots, \infty) \quad (6.43)$$

Розділимо обидві частини рівняння на доданок  $Y_n(x) T_n(t)$ :

$$a^2 \cdot \frac{Y_n^{IV}(x)}{Y_n(x)} + \frac{\ddot{T}_n(t)}{T_n(t)} = \frac{H_n(t)}{\rho F}$$

Розділяючи змінні і враховуючи результати § 6.2, матимемо:

$$-a^2 \cdot \frac{Y_n^{IV}(x)}{Y_n(x)} = \frac{\ddot{T}_n(t)}{T_n(t)} - \frac{H_n(t)}{\rho F} = -\omega_n^2,$$

звідки отримаємо рівняння для визначення функції  $T_n(t)$ :

$$\ddot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = \frac{H_n(t)}{\rho F}. \quad (6.44)$$

Розв'язок рівняння (6.44) для довільної функції часу  $H_n(t)$  має вигляд (3.54):

$$T_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t + \frac{1}{\rho F \omega_n} \cdot \int_0^t H_n(\xi) \cdot \sin \omega_n(t - \xi) \cdot d\xi. \quad (6.45)$$

3). З урахуванням (6.42), (6.45), загальний розв'язок (6.39) набуде вигляду:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x) \cdot [A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t + \frac{1}{\rho F \omega_n} \cdot \int_0^t H_n(\xi) \cdot \sin \omega_n(t - \xi) \cdot d\xi], \quad (6.46)$$

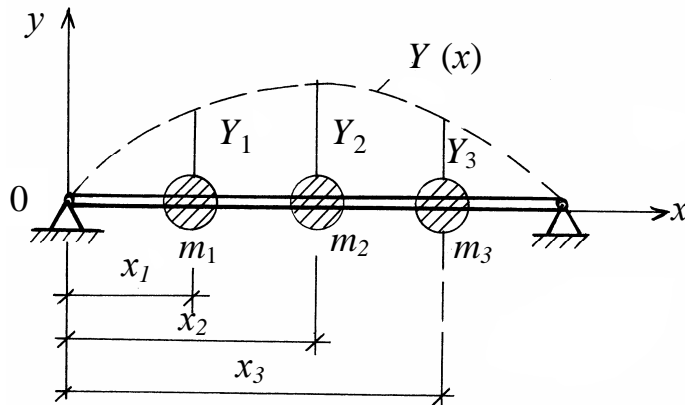
де сталі інтегрування  $A_n, B_n$  визначаються за допомогою початкових умов.

Рівняння (6.46) є **рівнянням вимушених поперечних коливань стержня** (при відсутності опору руху).

## 7. Наближені методи визначення власних частот поперечних коливань стержнів

### 7.1. Метод Релея (енергетичний метод)

Розглянемо стержень із зосередженими масами, який здійснює малі вільні коливання (рис. 7.1).



де  $Y_1 = Y(x_1)$ ,  $Y_2 = Y(x_2)$ ,  $Y_3 = Y(x_3)$ ,  
 $Y(x)$  - власна форма коливань стержня.

Рис. 7.1

При відсутності опору повна механічна енергія стержня відповідно до закону збереження енергії залишається незмінною:

$$T + \Pi = h = \text{const} . \quad (7.1)$$

Якщо стержень робить одне з головних коливань, то всі його точки одночасно досягають положень найбільшого відхилення від положення рівноваги. У цей момент

швидкості всіх точок дорівнюють нулю, а значить кінетична енергія  $T = 0$ , потенціальна ж енергія досягає максимуму:  $\Pi = \Pi_{\max} = h$ . Коли точки стержня проходять через положення рівноваги, то координати всіх точок дорівнюють нулю, а значить  $\Pi = 0$ . При цьому кінетична енергія максимальна:  $T = T_{\max} = h$ . З наведених міркувань випливає, що при здійсненні стержнем одного з головних коливань виконується співвідношення

$$T_{\max} = \Pi_{\max} . \quad (7.2)$$

Тому що прогин стержня  $y(x, t)$  змінюється в часі за гармонійним законом, його можна подати у вигляді добутку

$$y(x, t) = Y(x) \sin(\omega t + \varepsilon), \quad (7.3)$$

де  $Y(x)$  - власна форма коливань;  $\omega$  - власна частота;  $\varepsilon$  - початкова фаза коливань.

Диференціюючи (7.3) за часом, одержимо вираз для швидкостей точок стержня:

$$\dot{y}(x, t) = Y(x) \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varepsilon). \quad (7.4)$$

Тоді

$$\begin{aligned} y_{\max}(x) &= y(x, t) \Big|_{\sin(\omega t + \varepsilon) = 1} = Y(x), \\ \dot{y}_{\max}(x) &= \dot{y}(x, t) \Big|_{\cos(\omega t + \varepsilon) = 1} = \omega \cdot Y(x). \end{aligned} \quad (7.5)$$

Припускаючи, що потенціальна енергія стержня обумовлена тільки деформацією згину, одержимо:

$$\Pi = A_M = \int \frac{1}{2} M \cdot d\theta = \int_0^l \frac{1}{2} M \cdot \frac{M}{EJ} dx = \frac{1}{2} \int_0^l EJ (y'')^2 dx,$$

де  $M$  - згинальний момент;  $\theta$  - кут повороту перерізу, рівний  $\theta = \frac{dy}{dx}$ ;

$\frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = \frac{M}{EJ}$  - диференціальне рівняння вигнутої осі стержня;  $l$  - довжина стержня.

Отже,

$$\Pi_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l EJ (Y'')^2 dx. \quad (7.6)$$

Кінетична енергія обумовлена кінетичною енергією стержня і точкових мас. Для  $i$ -ї точкової маси

$$T_{\max} = \frac{1}{2} m_i \cdot v_{i\max}^2 = \frac{1}{2} m_i \cdot \dot{y}_{i\max}^2 = \frac{1}{2} m_i \cdot \omega^2 \cdot Y^2(x_i) = \frac{1}{2} m_i \cdot \omega^2 \cdot Y_i^2,$$

де  $v_i$  - швидкість точкової маси.

Для стержня

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \int \dot{y}_{i\max}^2 dm = \frac{1}{2} \int_0^l \dot{y}_{i\max}^2 \cdot \rho F dx = \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^l \rho F \cdot Y^2 dx,$$

де  $\rho$  - густина матеріалу стержня;  $F$  - площа його поперечного перерізу.

Отже, для стержня з приєднаними масами

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \omega^2 \left( \int_0^l \rho F \cdot Y^2 dx + \sum_{i=1}^N m_i \cdot Y_i^2 \right), \quad (7.7)$$

де  $N$  - число точкових мас.

Підставляючи (7.6) і (7.7) у (7.2), одержимо

$$\frac{1}{2} \omega^2 \left( \int_0^l \rho F \cdot Y^2 dx + \sum_{i=1}^N m_i \cdot Y_i^2 \right) = \frac{1}{2} \int_0^l EJ (Y'')^2 dx.$$

Звідки

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EJ (Y'')^2 dx}{\int_0^l \rho F \cdot Y^2 dx + \sum_{i=1}^N m_i \cdot Y_i^2}. \quad (7.8)$$

Вираз (7.8) визначає **формулу Релея для квадрата власної частоти поперечних коливань стержня із зосередженими масами**.

**Примітка 1.** Якщо  $Y(x)$  - дійсна форма коливань, то формула (7.8) дає точне значення (у рамках зроблених припущень) для даної форми коливань.

**Примітка 2.** Для стержнів із зосередженими масами дійсна форма коливань заздалегідь не відома. *Наближення* полягає в тому, що форма  $Y(x)$  вибирається приблизно, але *обов'язково* задовольняє геометричним граничним умовам (умовам, що накладаються на прогин і кут повороту на кінцях стержня). Практично можна скористатися декількома варіантами вибору форми  $Y(x)$ :

- 1) як  $Y(x)$  вибрати форму коливань стержня без мас *при таких же граничних умовах*, як і для стержня з масами;
- 2) як  $Y(x)$  вибрати будь-як функцію, що задовольняє

граничним умовам (чим ближче обрана функція буде до істинної форми, тим точніше вийде значення власної частоти);

3) як  $Y(x)$  вибрати статичну криву вигину під дією сил ваги зосереджених мас (у цьому випадку можна визначити тільки основну (нижчу) власну частоту).

**Примітка 3.** Масштаб наближеної функції  $Y(x)$  значення не має, тому що ця функція входить і в чисельник, і в знаменник формули (7.8) в однаковому степені.

**Примітка 4.** Формула Релея дає завищене значення (верхню границю) власної частоти:

$$\omega_{\text{дійсне}} \leq \omega_{\text{Релея}},$$

де  $\omega_{\text{дійсне}}$  - дійсне значення власної частоти.

## 7.2. Метод Донкерлі (метод «зведення» мас)

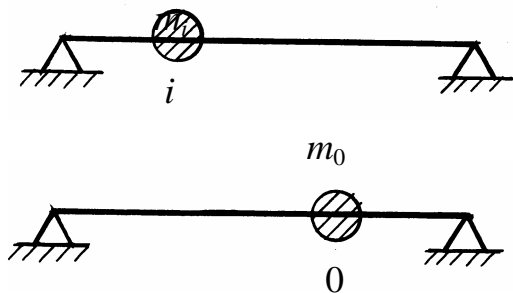


Рис. 7.2

Припустимо, що в деякій точці пружного стержня знаходиться зосереджена маса  $m_i$  (рис. 7.2). Якщо зневажити масою стержня, то це буде система з одним ступенем вільності і її власна частота дорівнюватиме

$$\omega_i = \sqrt{\frac{c_i}{m_i}}, \quad (7.9)$$

де  $c_i$  - коефіцієнт жорсткості пружної в'язі для маси  $m_i$ .

Помістимо в деякій іншій точці О, обраній за центр зведення, іншу масу  $m_0$  таку, що власна частота нової системи  $\omega_0 = \sqrt{\frac{c_0}{m_0}}$  буде

дорівнювати частоті  $\omega_i$ :

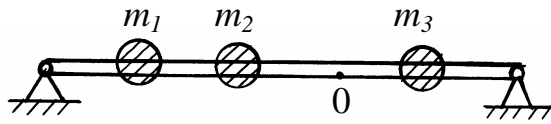
$$\omega_0 = \omega_i. \quad (7.10)$$

Тоді зведена маса  $m_0$  знаходиться зі співвідношення

$$m_0 = \frac{c_0}{c_i} m_i. \quad (7.11)$$

Отже, перенесення маси  $m_i$  в точку О не викликає зміни власної частоти системи, якщо її помножити на коефіцієнт зведення  $\frac{c_0}{c_i}$ .

Розглянемо стержень, масу якого будемо враховувати, що несе  $N$  зосереджених мас. Зведення кожної з мас і маси стержня до деякої точки О мусить відбуватися зі своїм коефіцієнтом зведення (рис. 7.3):



$$m_0 = \frac{c_0}{c_i} m_1 + \dots + \frac{c_0}{c_N} m_N + c_0 \int_0^l \frac{dm}{c(x)}. \quad (7.12)$$

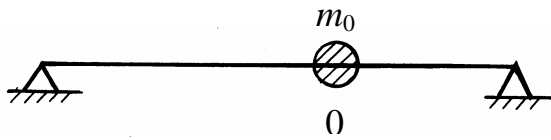


Рис. 7.3

Розділивши обидві частини на  $c_0$ , одержимо

$$\frac{m_0}{c_0} = \frac{m_1}{c_1} + \dots + \frac{m_N}{c_N} + \int_0^l \frac{dm}{c(x)},$$

або, з огляду на (7.9), запишемо

$$\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_1^2} + \dots + \frac{1}{\omega_N^2} + \frac{1}{\omega_c^2}, \quad (7.13)$$

де  $\omega_0$  - власна частота стержня із зосередженими масами, «зведеними» до деякої точки О;  $\omega_1, \dots, \omega_N$  - власні частоти приватних систем з одним ступенем вільності, що складаються тільки з мас  $m_1, \dots, m_N$  відповідно без урахування маси стержня;  $\omega_c$  - власна частота поперечних коливань стержня ( з урахуванням його маси ) без зосереджених мас.



Вираз (7.13) визначає *формулу Донкерлі для квадрата основної власної частоти поперечних коливань стержня з зосередженими масами*.

**Примітка 1.** Формула (7.13) є наближеною, тому що при перенесенні мас не враховується взаємний вплив цих мас.

**Примітка 2.** Формула Донкерлі дає завжди занижене значення (нижню границю) власної частоти:

$$\omega_{\text{Донкерлі}} \leq \omega_{\text{дійсне}}. \quad (7.14)$$

**Примітка 3.** При практичних розрахунках формулу Донкерлі зручно подати у вигляді

$$\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_c^2} + \sum_{i=1}^N m_i \cdot \delta_{ii}, \quad (7.15)$$

де  $\delta_{ii} = \frac{1}{c_i}$  - *коефіцієнт податливості* (впливу) - *переміщення точки*

*приєднання маси  $m_i$  під дією одиничної сили, прикладеної в тій же точці* (рис. 7.4). Переміщення  $\delta_{ii}$  можна визначити за допомогою інтеграла Мора:

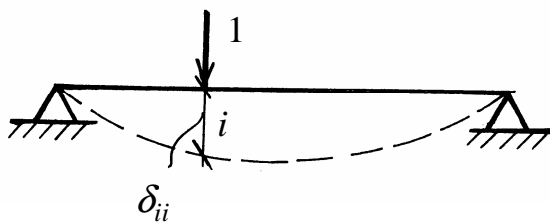


Рис. 7.4

$$\delta_{ii} = \int_0^l \frac{M_i M_i}{EJ} dx, \quad (7.16)$$

де  $M_i$  - згинальний момент, що виникає в перерізі стержня, де розміщена  $i$ -та маса, при дії одиничної сили.

Інтеграл, що входить у праву частину формули (7.16), можна визначити за способом Верещагіна на підставі епюри для згинального моменту при дії одиничної сили.

### 7.3. Приклад розрахунку основної частоти поперечних коливань стержня з приєднаними масами

Для визначення основної власної частоти стержня з приєднаними масами зручно застосувати одночасно методи Релея і Донкерлі, що дозволяють одержати верхню і нижню границі для дійсного значення частоти

$$\omega_{\text{Донкерлі}} < \omega_{\text{дійсне}} \leq \omega_{\text{Релея}} \quad (7.17)$$

#### Постановка задачі

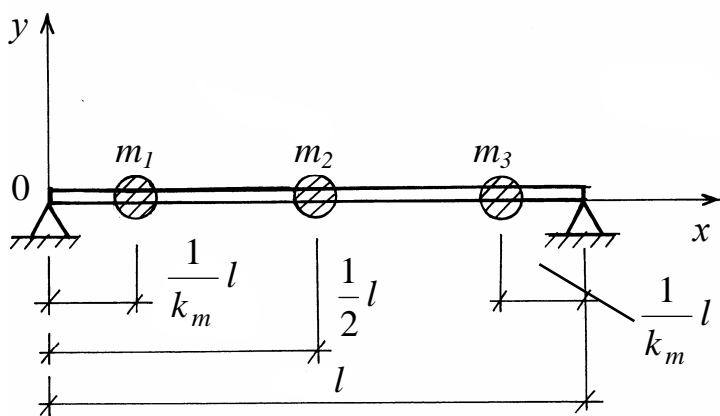


Рис. 7.5

Розглянемо шарнірно обпертий на кінцях стержень сталого прямокутного перерізу довжиною  $l$  (рис.7.5), який несе три зосереджені маси. Одна маса розташована посередині стержня, а дві інші - симетрично щодо середини.

Розташування симетричних

мас задається за допомогою коефіцієнта  $k_m$ , тоді координати зосереджених мас будуть визначатися співвідношеннями

$$x_1 = \frac{l}{k_m}; \quad x_2 = \frac{l}{2}; \quad x_3 = \frac{k_m - 1}{k_m} l.$$

Маси визначаються коефіцієнтами  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  і  $k_c$  (для стержня):

$$m_1 = k_1 \cdot m; \quad m_2 = k_2 \cdot m; \quad m_3 = k_3 \cdot m; \quad \text{і} \quad m_c = k_c \cdot m \quad (\text{для стержня}),$$

де  $m$  - деякий параметр, що має розмірність маси.

**Визначити** верхню і нижню границі діапазону частот, якому належить дійсне значення основної власної частоти стержня (рис. 7.6) з параметрами:

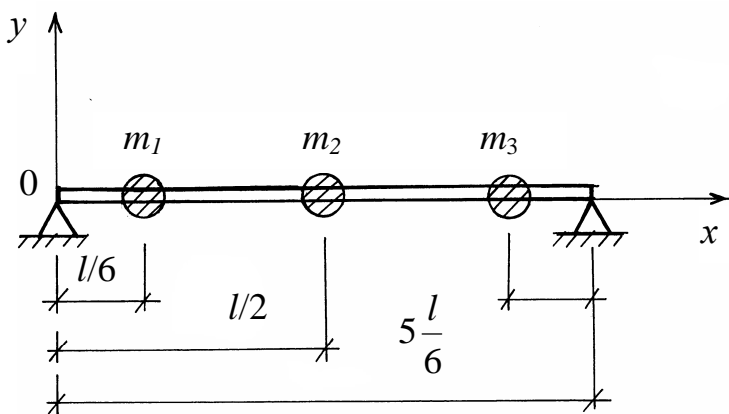


Рис. 7.6

$$E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па};$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_c = 1;$$

$$k_m = 6;$$

$$b = 6 \text{ см};$$

$$h = 8 \text{ см};$$

$$l = 8 \text{ м};$$

$$m = 10 \text{ кг}.$$

### Розв'язання

1. Визначення основної власної частоти методом Релея.

Задамо основну форму коливань у вигляді

$$Y(x) = \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Ця функція задовольняє граничним умовам при шарнірному обпиранні:

$$Y(0) = 0;$$

$$Y(l) = 0;$$

$$Y''(0) = 0;$$

$$Y''(l) = 0$$

і є основною власною формою поперечних коливань стержня без зосереджених мас.

Обчислимо інтеграл вигляду:

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx &= \frac{l}{\pi} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx \left( \frac{\pi x}{l} \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{l}{\pi} \int_0^l \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right) d \left( \frac{2\pi x}{l} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{l}{\pi} \left[ \frac{2\pi x}{l} \Big|_0^l - \sin \frac{2\pi x}{l} \Big|_0^l \right] = \frac{1}{4} \cdot \frac{l}{\pi} [2\pi - 0] = \frac{l}{2}. \end{aligned}$$

Знайдемо чисельник формули (7.8):

$$Y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l},$$

$$\int_0^l EJ (Y'')^2 dx = EJ \frac{\pi^4}{l^4} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{EJ \pi^4}{2l^3}.$$

Обчислимо знаменник формули (7.8):

$$Y_1 = Y(x_1) = Y\left(\frac{l}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot \frac{l}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6},$$

$$Y_2 = Y(x_2) = Y\left(\frac{l}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot \frac{l}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2},$$

$$Y_3 = Y(x_3) = Y\left(\frac{5l}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot \frac{5l}{6}\right) = \sin \frac{5\pi}{6}.$$

$$\begin{aligned} & \int_0^l \rho F \cdot Y^2 dx + m_1 Y_1^2 + m_2 Y_2^2 + m_3 Y_3^2 = \\ & = \rho F \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx + m_1 \sin^2 \left(\frac{\pi}{6}\right) + m_2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2}\right) + m_3 \sin^2 \left(\frac{5\pi}{6}\right) = \\ & = \rho F \frac{l}{2} + \frac{m_1}{4} + m_2 + \frac{m_3}{4} = \frac{m_c}{2} + \frac{m_1}{4} + m_2 + \frac{m_3}{4} = \\ & = \frac{m}{2} + \frac{m}{4} + m + \frac{m}{4} = 2m, \end{aligned}$$

де  $m_c = \rho Fl$  - маса стержня. Складаючи формулу (7.8), одержимо:

$$\omega^2 = \frac{EJ\pi^4}{2l^3 \cdot 2m} = \frac{EJ\pi^4}{4ml^3}$$

або

$$\begin{aligned} \omega_{\text{Релея}} &= \frac{\pi^2}{2} \sqrt{\frac{EJ}{ml^3}} = 5 \sqrt{\frac{EJ}{ml^3}} = 5 \sqrt{\frac{E \cdot b \cdot h^3}{12 \cdot m \cdot l^3}} = \\ &= 5 \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{11} \frac{\text{Н}}{\text{м}} \cdot 6 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot 8^3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3}{12 \cdot 10 \text{ кг} \cdot 8^3 \text{ м}^3}} = 50 \left( \frac{\text{рад}}{\text{с}} \right). \end{aligned}$$

## 2. Визначення основної власної частоти методом Донкерлі.

Розглянемо приватні системи, з яких складається заданий стержень із зосередженими масами (рис. 7.7 - 7.10):

Система 1 – стержень без зосереджених мас (маса стержня враховується).

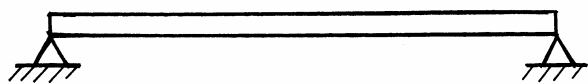


Рис. 7.7

Система 2 - невагомий стержень із зосередженою масою.

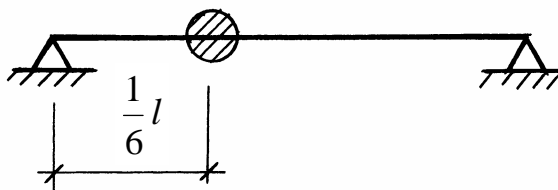


Рис. 7.8

Система 3 - невагомий стержень із зосередженою масою.

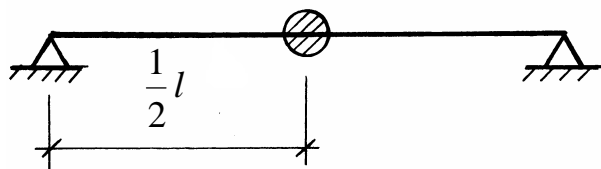


Рис. 7.9

Система 4 - невагомий стержень із зосередженою масою.

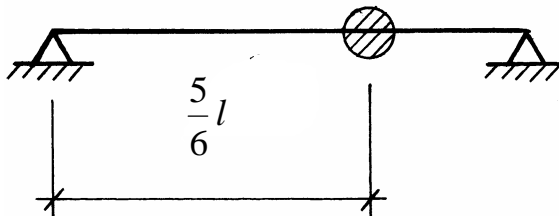


Рис. 7.10

У всіх приватних системах граничні умови такі ж, як і для заданого в умові задачі стержня: шарнірне обпирання на кінцях.

Для системи 1 (рис. 7.7), відповідно до формули (6.31), основна власна частота поперечних коливань стержня

$$\omega_c = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}}.$$

Тоді

$$\frac{1}{\omega_c^2} = \frac{l^4}{\pi^4} \cdot \frac{\rho F}{EJ} = \frac{l^3}{\pi^4} \cdot \frac{\rho F \cdot l}{EJ} = \frac{1}{\pi^4} \cdot \frac{m_c \cdot l^3}{EJ}.$$

Для визначення коефіцієнта податливості  $\delta_{11}$  системи 2 (рис.7.8) прикладемо до стержня одиничну силу в точці, що відповідає місцю приєднання зосередженої маси (рис. 7.11). Визначимо реакції опор (їхні значення рівні 5/6 і 1/6) і побудуємо епюру згинального моменту  $M_1$ .

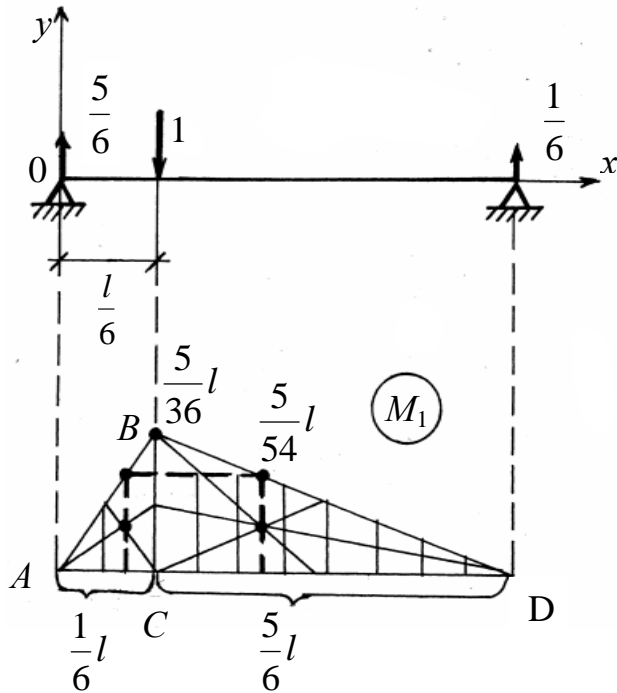


Рис. 7.11

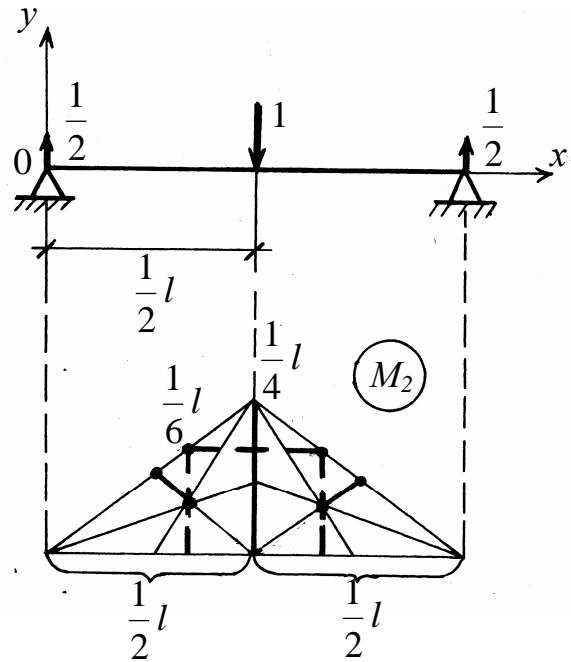


Рис. 7.12

За способом Верещагіна, коефіцієнт податливості пропорційний добутку площі епюри згинального моменту на ординату над центром ваги фігури, яку утворює епюра. У даному прикладі її зручно розбити на два трикутники ABC і BCD.

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \left( S_{ABC} \cdot \frac{5}{54} l + S_{BCD} \cdot \frac{5}{54} l \right),$$

або

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{6} \cdot \frac{5}{36} l \cdot \frac{5}{54} l + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} l \cdot \frac{5}{36} l \cdot \frac{5}{54} l \right) = \frac{25}{3888} \cdot \frac{l^3}{EJ}.$$

Для системи 3 (рис. 7.9) одержимо (рис. 7.12):

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{l}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{l}{6} \right) = \frac{1}{48} \cdot \frac{l^3}{EJ}.$$

Для системи 4 (рис. 7.10), що симетрична відносно до системи 2 (рис. 7.13), буде:

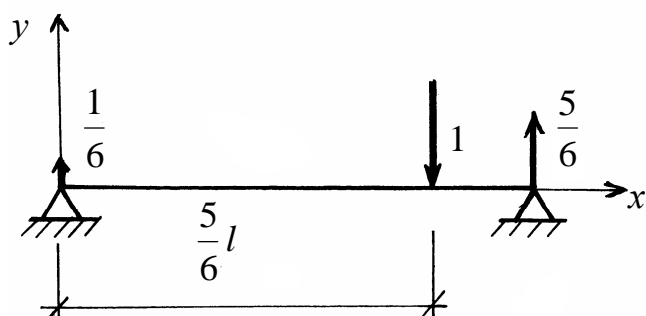


Рис. 7.13

$$\partial_{33} = \partial_{11} = \frac{25}{3888} \cdot \frac{l^3}{EJ}.$$

Відповідно до формули (7.15)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_0^2} &= \frac{l^3}{EJ} \left( \frac{m_c}{\pi_4} + \frac{25 \cdot m_1}{3888} + \frac{m_2}{48} + \frac{25 \cdot m_3}{3888} \right) \approx \frac{ml^3}{EJ} \left( \frac{1}{100} + \frac{1}{48} + \frac{25}{1944} \right) \approx \\ &\approx \frac{ml^3}{EJ} \cdot \frac{17}{400}. \end{aligned}$$

Тоді

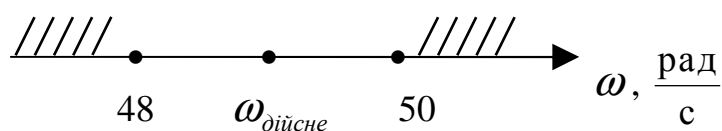
$$\omega_{\text{Донкерлі}} \approx \sqrt{\frac{EJ}{ml^3} \cdot \frac{400}{17}} \approx \sqrt{23,5} \cdot \sqrt{\frac{EJ}{ml^3}} \approx 4,8 \sqrt{\frac{EJ}{ml^3}} = 48 \left( \frac{\text{рад}}{\text{с}} \right).$$

**Відповідь:** Основна власна частота поперечних коливань стержня за методом

Донкерлі  $\omega_{\text{Донкерлі}} = 48 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ , за методом Релея  $\omega_{\text{Релея}} = 50 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ .

Дійсне значення основної власної частоти лежить в інтервалі

$$48 < \omega_{\text{дійсне}} < 50 \left( \frac{\text{рад}}{\text{с}} \right).$$



## 8. Вільні коливання пружних пластин і оболонок

**Пластиною** називають тіло, обмежене двома плоскими поверхнями, відстань між якими  $h$  ( $h$  - товщина) мала у порівнянні з двома іншими розмірами тіла. Якщо поверхні, що обмежують тіло, криволінійні, то таке тіло називають **оболонкою**. Поверхня, яка рівновідстоїть від обмежуючих поверхонь, називається **серединною** (рис. 8.1).

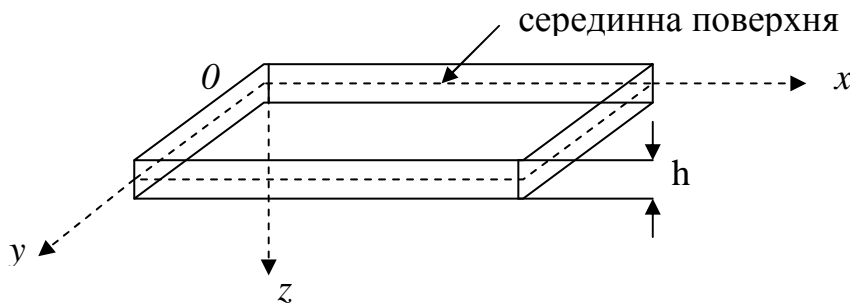


Рис. 8.1

У подальшому будемо розглядати пластини і оболонки сталої товщини:  $h = const$ . Будемо також вважати, що матеріал пластини або оболонки однорідний, ізотропний і для нього виконується закон Гука, а переміщення точок малі у порівнянні з товщиною.

В основі теорії пружності пластин і оболонок лежать гіпотези Кірхгофа-Лява, які є узагальненням гіпотез поперечного згину стержнів:

- 1) прямолінійний елемент, перпендикулярний до серединної поверхні до деформації, залишається прямим і перпендикулярним до деформованої серединної поверхні і довжина цього елемента не змінюється;
- 2) нормальні напруження на площадках, паралельних серединній поверхні, малі у порівнянні з іншими напруженнями і ними можна нехтувати (гіпотеза ненадавлювання шарів пластини).



## 8.1. Вільні поперечні коливання пластини

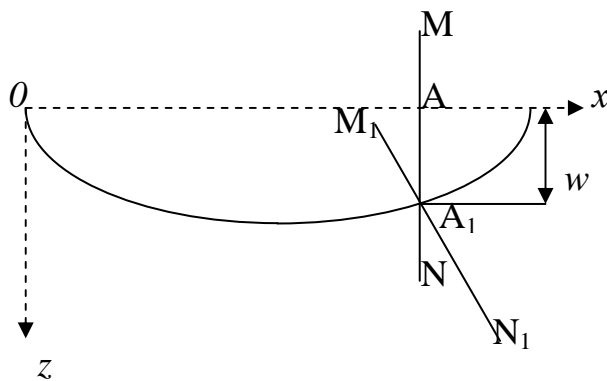


Рис. 8.2

Сумістимо координатну площину  $xOy$  із серединною поверхнею пластини до деформації. Згідно з гіпотезами Кірхгофа-Лява, серединна поверхня при коливаннях не деформується, тобто нормальний до недеформованої поверхні елемент  $MN$  при прогині

обертається навколо точки  $A$ , не змінюючи своєї довжини (рис. 8.2). При цьому точки серединної поверхні (т.  $A$ ) переміщуються тільки паралельно осі  $z$ . Переміщення точки серединної поверхні  $w$  в напрямку осі  $z$  називають **прогином**.

Диференціальне рівняння коливань можна отримати, розглядаючи рівняння рівноваги елемента пластини і застосовуючи до нього принцип Даламбера:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = - \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (8.1)$$

де  $w = w(x, y, t)$  - прогин точки серединної поверхні пластини з координатами  $(x, y)$ , який є функцією трьох змінних: координат  $x, y$  і часу  $t$ ,  $\rho$  - густина матеріалу,  $h$  - товщина пластини,  $E$  - модуль пружності,

$\mu$  - коефіцієнт Пуассона,  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$  - згинна жорсткість пластини.

Відповідно до методу Фур'є, розв'язок диференціального рівняння (8.1) отримаємо у вигляді добутку функцій, одна з яких залежить тільки від координат, а друга від часу:

$$w(x, y, t) = W(x, y) \cdot T(t). \quad (8.2)$$

У цьому рівнянні функція  $W(x, y)$  описує *форму коливань*.

Підставляючи (8.2) у (8.1), одержимо

$$\left[ \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial y^4} \right] \cdot T(t) = -\frac{\rho h}{D} \cdot W(x, y) \cdot \ddot{T}(t). \quad (8.3)$$

Розділимо змінні. При цьому врахуємо, що оскільки одна частина рівняння буде залежати тільки від координат  $x, y$ , а друга – від часу  $t$ , рівність можлива тільки в тому випадку, коли ліва і права частини дорівнюють константі. Позначивши цю константу  $\omega^2$  (можна довести [1], що ця константа від’ємна), рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{\left[ \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial y^4} \right]}{-\frac{\rho h}{D} \cdot W(x, y)} = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -\omega^2, \quad (8.4)$$

що еквівалентно двом диференціальним рівнянням:

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0, \quad (8.5)$$

$$\frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial y^4} = \frac{\rho h}{D} \cdot \omega^2 \cdot W(x, y), \quad (8.6)$$

Розв’язок диференціального рівняння (8.5), як відомо, має вигляд

$$T(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t. \quad (8.7)$$

Для прямокутних пластин власні форми  $W(x, y)$  звичайно розшуковують у вигляді ряду, що складається з добутоків двох функцій, кожна з яких залежить тільки від однієї координати:

$$W(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cdot X_m(x) \cdot Y_n(y), \quad (8.8)$$

де  $a_{mn}$  – сталі коефіцієнти, а функції  $X_m(x), Y_n(y)$  мусять задовольняти граничним умовам.

Загальний розв'язок диференціального рівняння (8.1) виходить як лінійна комбінація розв'язків (8.7) і (8.8) усієї множини  $m, n$  частот  $\omega_{mn}$ :

$$w(x, y, t) = W(x, y) \cdot T(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_m(x) \cdot Y_n(y) \cdot (A_{mn} \cos \omega_{mn} t + B_{mn} \sin \omega_{mn} t), \quad (8.9)$$

де сталі  $A_{mn}, B_{mn}$  (в які відносять і сталі  $a_{mn}$ ) визначаються з початкових умов  $w(x, y, 0)$  і  $\dot{w}(x, y, 0)$ .

У загальному випадку граничних умов на контурі пластини функції  $X_m(x), Y_n(y)$  можна знайти наближеними методами, використовуючи варіаційні методи Рітца, Бубнова-Гальоркіна та ін. І тільки у випадку вільно обпертої по двох протилежних краях пластини розв'язок рівняння (8.6) можна знайти у вигляді аналітичного виразу.

## 8.2. Поперечні коливання пластини з шарнірно (вільно) обпертими краями

Розглянемо пластину довжиною  $a$  і шириною  $b$  (рис. 8.3).

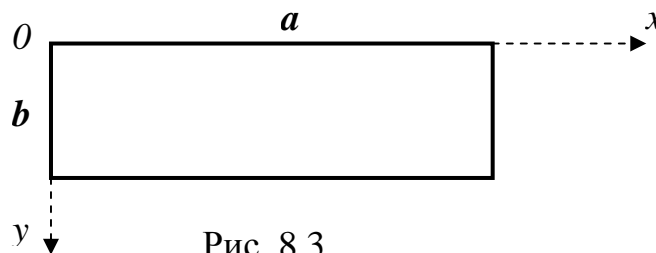


Рис. 8.3

При вільному обпиранні краю на ньому мусять дорівнювати нулю прогин і згинальний момент. Зважаючи на вирази згинальних моментів

$$M_x = -D \cdot \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right),$$

$$M_y = -D \cdot \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right),$$

граничні умови у випадку вільного обпирання країв мають вигляд:

$$\begin{aligned}
W|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0, \quad W|_{x=a} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \Big|_{x=a} = 0, \\
W|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = 0, \quad W|_{y=b} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \Big|_{y=b} = 0.
\end{aligned}
\tag{8.10}$$

Граничним умовам (8.10), відповідно до [1], задовольняють функції

$$X_m(x) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right), \quad Y_n(y) = \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Тому розв'язок (8.8) набуде вигляду

$$W(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \tag{8.11}$$

Підставляючи далі (8.11) у (8.6), отримаємо:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cdot \left[ \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \right] \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = \\
= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cdot \left(\frac{\rho h}{D} \omega^2\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right).
\end{aligned}
\tag{8.12}$$

Рівняння (8.12) буде вірним, якщо для кожного члену ряду буде виконуватись рівність:

$$\left[ \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \right] = \frac{\rho h}{D} \omega^2. \tag{8.13}$$

Рівняння (8.13) називається **частотним**. Розв'язками цього рівняння будуть **власні частоти**

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \cdot \pi^2 \cdot \left[ \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]. \tag{8.14}$$

При цьому параметри  $m, n$  (**хвильові параметри**) визначають число напівхвиль у напрямках осей  $x$  і  $y$  відповідно у *власних формах*:

$$W_{mn} = a_{mn} \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

*Проаналізуємо отримані результати.*

1). При  $m = 1, n = 1$  реалізується безвузлова форма коливань (рис. 8.4):

$$W_{11} = a_{11} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right),$$

коли всі точки пластини одночасно проходять положення рівноваги і одночасно досягають максимального відхилення від положення рівноваги:

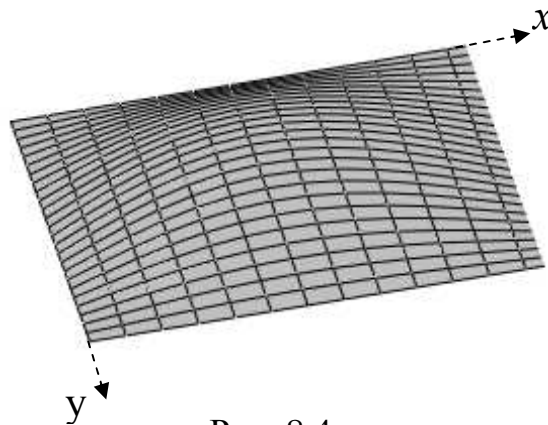


Рис. 8.4

При  $m = 2, n = 1$  реалізується форма коливань з однією вузловою лінією, що паралельна осі  $x$  (рис. 8.5):

$$W_{21} = a_{21} \cdot \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right).$$

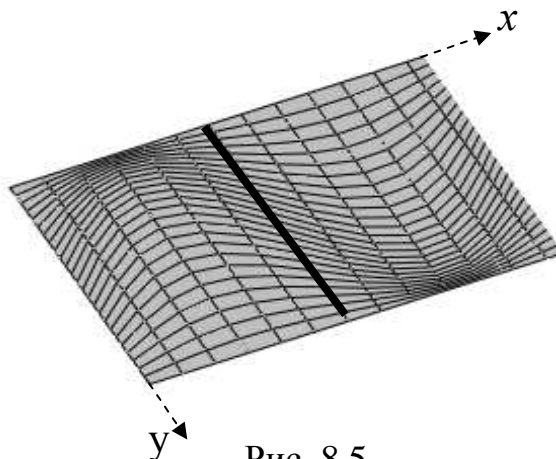


Рис. 8.5

При  $m = 2, n = 2$  реалізується форма коливань з двома вузловими лініями, паралельними осям  $x$  і  $y$  (рис. 8.6):

$$W_{22} = a_{22} \cdot \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right).$$

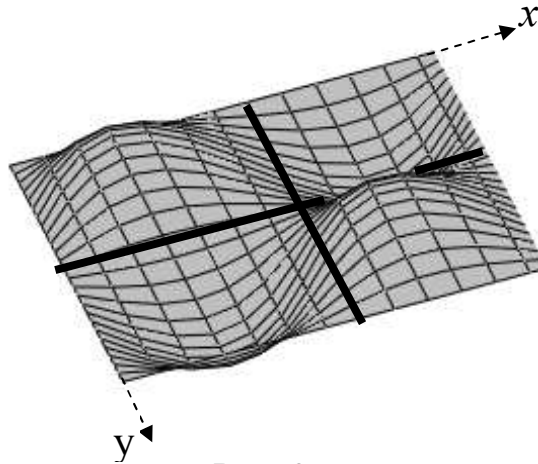


Рис. 8.6

При  $m = 3, n = 3$  реалізується форма коливань з чотирма вузловими лініями, паралельними осям  $x$  і  $y$  (рис. 8.7):

$$W_{33} = a_{33} \cdot \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\pi y}{b}\right).$$

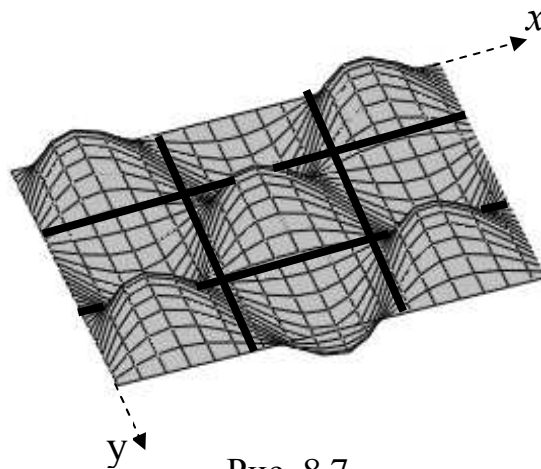


Рис. 8.7

При цьому точки пластини, які належать **вузловим лініям**, при коливаннях залишаються нерухомими, а ділянки поверхні, які граничать з вузловою лінією, здійснюють коливання у протилежних фазах.

2). Аналізуючи спектр власних частот (формула (8.14)), можна відмітити наступне:

а) найнижча (*основна*) частота визначається при хвильових параметрах  $m = 1, n = 1$ , що відповідає безвузловій (*основній*) формі коливань;

б) існують частоти, що відповідають декількам парам значень хвильових параметрів. Наприклад, коли  $\frac{m_1}{a} = \frac{n_2}{b}$ , або  $\frac{m_2}{a} = \frac{n_1}{b}$ . При коливаннях з такою частотою відповідні власні форми «додаються» одна до одної.

### 8.3. Вільні коливання колової циліндричної оболонки з вільно (шарнірно) обпертими торцями

Розглянемо замкнуту оболонку з найпростішою геометрією – циліндричну. Для неї зручно використати циліндричну систему координат:  $Ox\theta z$ , де  $x, z$  - звичайні,  $\theta$  - криволінійна координати (рис. 8.8).

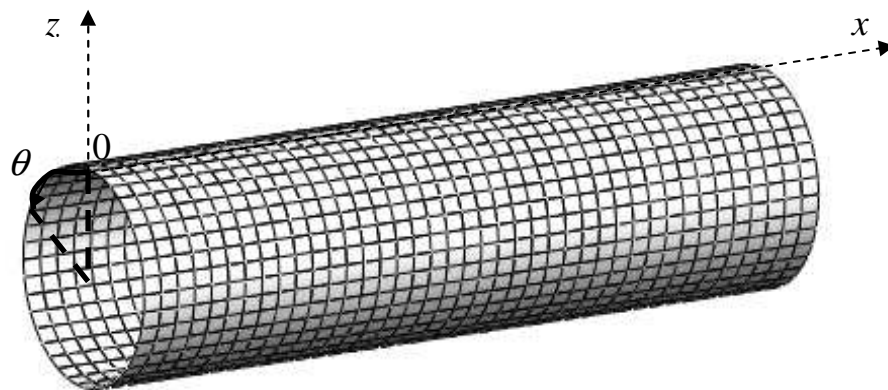


Рис. 8.8

Позначимо  $R, h, l$  - відповідно радіус, товщину і довжину оболонки.

Виділимо елемент серединної поверхні і позначимо його переміщення уздовж осей  $x\theta z$  відповідно:  $u$  - поздовжнє,  $v$  - дотичне,  $w$  - радіальне (прогин) (рис. 8.9).

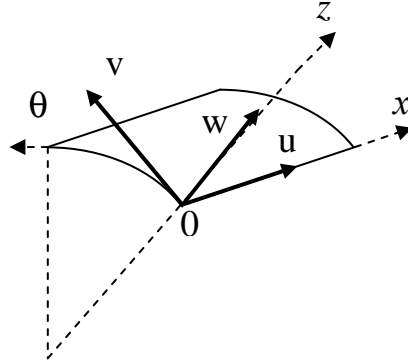


Рис. 8.9

Розглядаючи рівновагу елемента оболонки, складемо:

1) рівняння рівноваги просторової системи сил (їх п'ять, шосте виконується тотожно на підставі закону парності дотичних напружень), які містять вісім невідомих погонних сил і моментів (рис. 8.10):

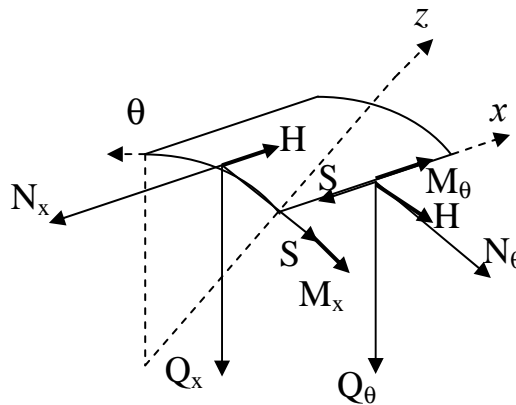


Рис. 8.10

$N_x, N_\theta$  - погонні нормальні сили;  $Q_x, Q_\theta$  - погонні поперечні сили;

$S$  - погонна зсувна сила;  $M_x, M_\theta$  - погонні згинальні моменти;

$H$  - погонний крутильний момент;

2) шість фізичних співвідношень, які зв'язують на основі закону Гука погонні сили і моменти з шістьма компонентами деформації:



$\varepsilon_x, \varepsilon_\theta$  - подовження;  $\gamma$  - зсув;  $K_x, K_\theta$  - зміни кривизн;  $\chi$  - кручення;

3) шість геометричних співвідношень, що зв'язують компоненти деформації з трьома переміщеннями  $u, v, w$ .

У підсумку отримаємо 17 диференціальних рівнянь з 17 невідомими. Цю систему для циліндричної оболонки можна звести до трьох диференціальних рівнянь у частинних похідних відносно трьох переміщень.

Заміняючи, згідно з принципом Даламбера, статичне навантаження силами інерції, отримаємо **систему диференціальних рівнянь вільних коливань циліндричної оболонки**:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\mu}{2R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{\mu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\rho h}{B} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{1+\mu}{2R} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \\ - \frac{h^2}{12R^2} \left[ \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} - \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right] = \frac{\rho h}{B} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (8.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R^2} + \\ + \frac{h^2}{12R^2} \left[ R^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \theta} \right] = - \frac{\rho h}{B} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

де  $B = \frac{Eh}{1-\mu^2}$  - жорсткість оболонки на розтяг-стиск.

У випадку вільного обпирання торців оболонки (наприклад, при установці на торцах жорстких шпангоутів), граничні умови набудуть вигляду: на торцях  $x = 0$  і  $x = l$  мусять виконуватись по чотири рівняння:

$$\begin{aligned} v = 0, \quad w = 0, \quad M_x = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\mu}{R} \left( -\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] = 0, \\ N_x = B \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu}{R} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Розв'язок системи диференціальних рівнянь (8.15), який задовольняє граничним умовам (8.16), розшукуємо у вигляді подвійних рядів:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \cdot \cos(n\theta) \cdot \sin(\omega_{mn}t + \varepsilon_{mn}), \\ v &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} B_{mn} \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \cdot \sin(n\theta) \cdot \sin(\omega_{mn}t + \varepsilon_{mn}), \\ w &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \cdot \cos(n\theta) \cdot \sin(\omega_{mn}t + \varepsilon_{mn}), \end{aligned} \quad (8.17)$$

де  $A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}$  - сталі коефіцієнти,  $\omega_{mn}, \varepsilon_{mn}$  - частота і початкова фаза коливань.

Підставляючи (8.17) у (8.15) і прирівнюючи відповідні члени рядів у лівих і правих частинах рівнянь (8.13), отримаємо систему трьох алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів  $A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}$ :

$$\begin{aligned} (a_{11} - \omega_{mn}^2)A_{mn} + a_{12}B_{mn} + a_{13}C_{mn} &= 0, \\ a_{21}A_{mn} + (a_{22} - \omega_{mn}^2)B_{mn} + a_{23}C_{mn} &= 0, \\ a_{31}A_{mn} + a_{32}B_{mn} + (a_{33} - \omega_{mn}^2)C_{mn} &= 0, \end{aligned} \quad (8.18)$$

де  $a_{ij}$  - параметри, що залежать від чисел  $m, n$  і сталих параметрів, що визначають властивості матеріалу і геометричні розміри оболонки:  $\rho, E, \mu, h, R, l$ .

Умовою існування ненульового розв'язка рівнянь (8.18) буде рівність нулю визначника цієї системи:

$$\Delta(\omega_{mn}^6) = 0. \quad (8.19)$$

Рівняння (8.19) називається **частотним**. Визначник (8.19) має третій порядок відносно  $\omega_{mn}^2$ . Від'ємні значення  $\omega_{mn}$  відкидаємо як такі, що не мають фізичного змісту. Отже, для кожної пари чисел  $m, n$  отримуємо по три значення **власних частот**  $\omega_{mn_1}, \omega_{mn_2}, \omega_{mn_3}$ . Ці частоти відповідають переважно радіальним (згинальним)  $\omega_{mn_1}$ , поздовжнім  $\omega_{mn_2}$  і крутильним

$\omega_{m_3}$  коливанням оболонки, при цьому найменша частота  $\omega_{m_1}$  відповідає радіальним коливанням.

*Проаналізуємо властивості вільних коливань оболонок.*

1). При  $n = 0$  дотичні переміщення  $v$  відсутні, а переміщення  $u, w$  не залежать від координати  $\theta$ . Такі коливання називаються **осесиметричними**.

2). Спектр частот оболонки має область “згущення”, де частоти для різних пар чисел  $m, n$  відрізняються одна від одної на досить невелике значення.

3). Найнижча частота коливань оболонки відповідає числу  $m = 1$ , але число  $n$  при цьому (на відміну від пластини) не дорівнює 1, а залежно від параметрів оболонки може дорівнювати 4, 5, 6 та ін.

4). Форми власних коливань оболонки, наприклад, для радіального переміщення  $w$ , залежно від хвильових чисел  $m, n$  мають наступний вигляд:

при  $m = 1, n = 0$  реалізується безвузлова за довжиною і осесиметрична за колом (безвузлова) форма коливань (рис. 8.11);

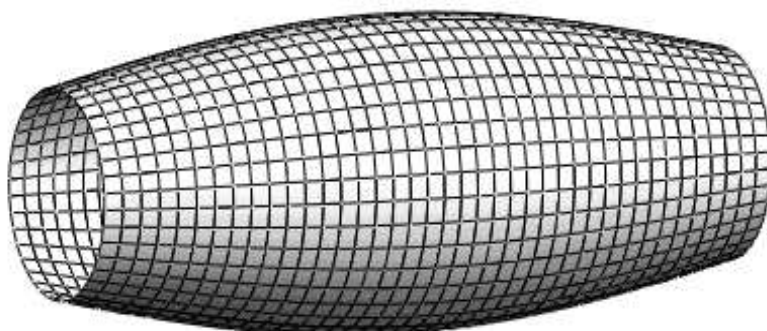


Рис. 8.11

при  $m = 2, n = 0$  реалізується одновузлова за довжиною і осесиметрична за колом форма коливань (рис. 8.12);

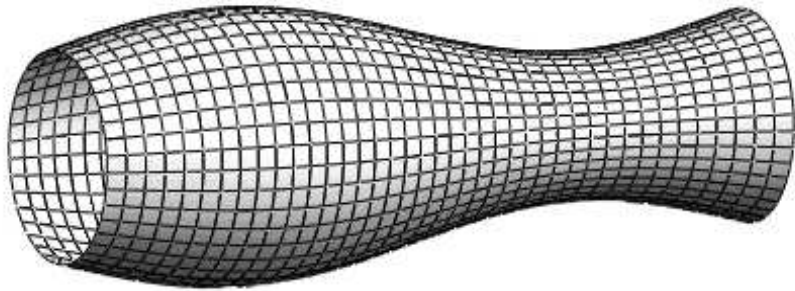


Рис. 8.12

при  $m = 3, n = 0$  реалізується двовузлова за довжиною і осесиметрична за колом форма коливань (рис. 8.13);

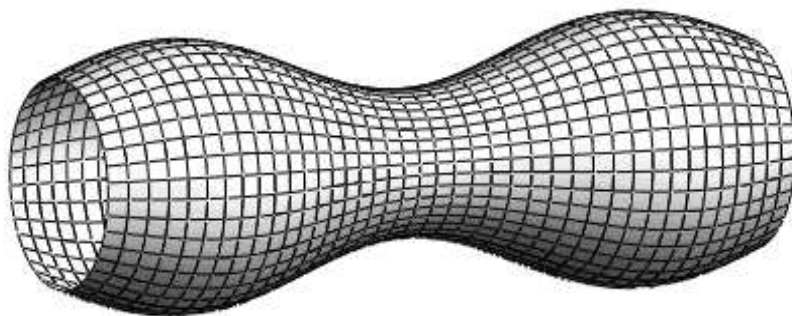


Рис. 8.13

при  $m = 9, n = 0$  реалізується восьмивузлова за довжиною і осесиметрична за колом форма коливань (рис. 8.14);

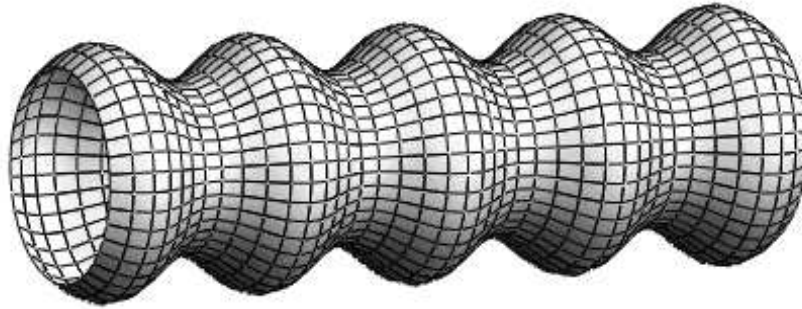


Рис. 8.14

при  $m = 1, n = 1$  реалізується безвузлова за довжиною і двовузлова за колом форма коливань (рис. 8.15);

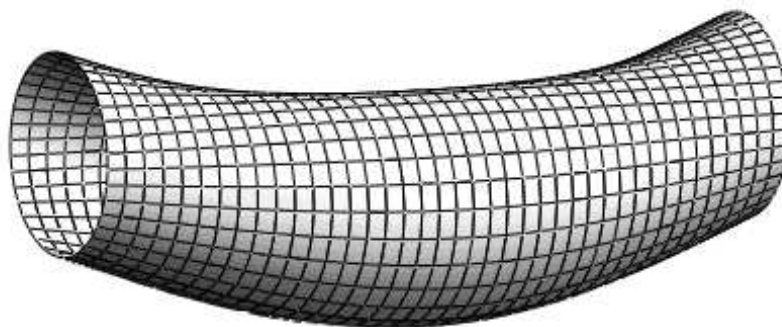
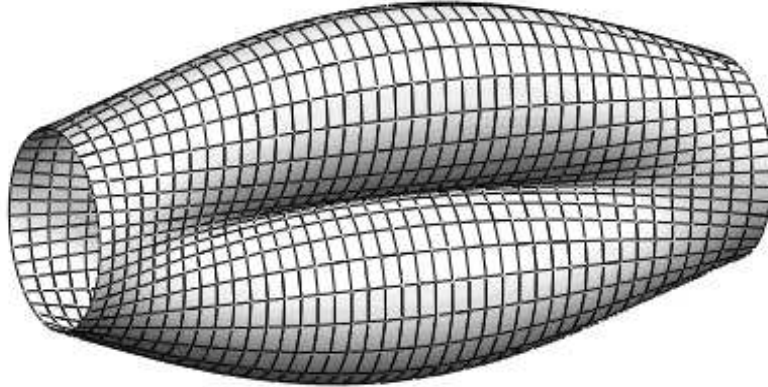


Рис. 8.15

при  $m = 1, n = 2$  реалізується безвузлова за довжиною і чотиривузлова за колом форма коливань (рис. 8.16);



при  $m = 1, n = 3$  реалізується безвузлова за довжиною і шестивузлова за колом форма коливань (рис. 8.17);

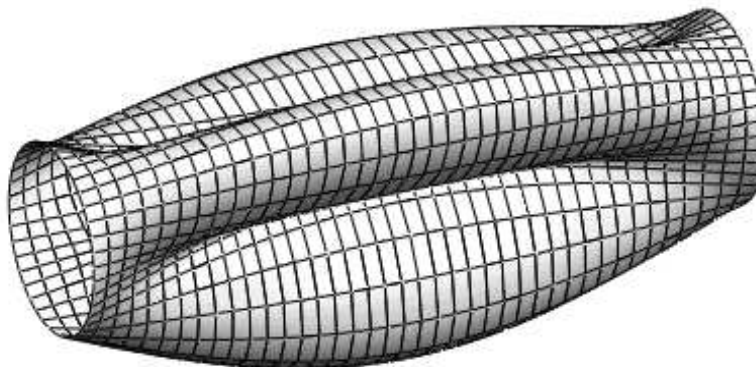


Рис. 8.17

при  $m = 3, n = 3$  реалізується двовузлова за довжиною і шестивузлова за колом форма коливань (рис. 8.18);

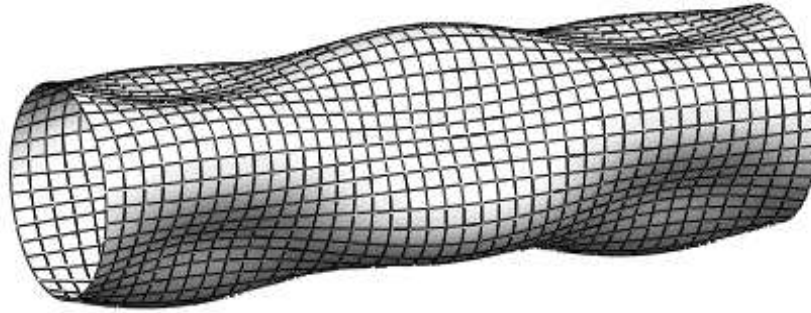


Рис. 8.18

при  $m = 9, n = 6$  реалізується восьмивузлова за довжиною і дванадцятивузлова за колом форма коливань (рис. 8.19);

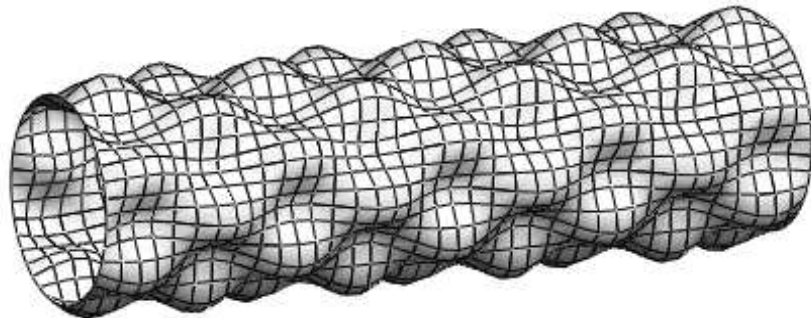


Рис. 8.19

## IV. ОСНОВИ ТЕОРІЇ УДАРУ

### 9. Елементарна теорія удару

Явище удару досить часто зустрічається в техніці і може мати як бажаний характер, наприклад, як елемент технологічних процесів (дроблення крихких тіл, ковка, штамповка, забивання палів), так і небажаний (удари морських хвиль об корабель, ударні дії на залізничні вагони або мостові споруди при проходженні стиків рейок, удари при падінні тіл і вибухи при аваріях тощо).

Механізм ударної взаємодії є досить складним процесом, який потребує урахування фізичних властивостей тіл під час їх зіткнення. Але в першому наближенні можна використати положення, що ґрунтуються на дослідженнях Ньютона. Це наближення є достатньо добрим, якщо під час удару відбувається тільки місцева деформація поблизу точки контакту тіл.

#### 9.1. Основні визначення і рівняння теорії удару матеріальної точки

При русі матеріальної точки під дією зовнішніх сил її швидкість змінюється в часі безперервно: кожному малому проміжку часу  $\Delta t = \tau$  відповідає малий приріст швидкості  $\Delta \bar{V} = \bar{V}_1 - \bar{V}_0$ . У цьому можна переконатись, якщо застосувати теорему про середнє до правої частини теореми про зміну кількості руху точки:

$$m(\bar{V}_1 - \bar{V}_0) = \int_0^\tau \bar{F} \cdot dt \approx \bar{F}_{cp} \cdot \tau. \quad (9.1)$$

Якщо сила, що діє на точку, буде достатньо великою (мати порядок  $\frac{1}{\tau}$ ), то приріст швидкості  $\Delta \bar{V}$  за малий проміжок часу  $\tau$  буде скінченною величиною.



Явище, при якому швидкість точки за малий проміжок часу  $\tau$  змінюється на скінченну величину, називається **ударом**. Проміжок часу  $\tau$ , протягом якого відбувається удар, називається **часом удару**. Сила, яка діє протягом часу удару і досягає значної величини, називається **ударною силою**. Як правило, точний закон зміни за часом ударної сили невідомий, але наближений графік її модуля має вигляд (рис. 9.1).

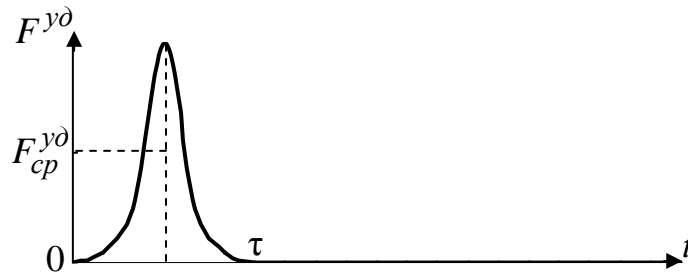


Рис. 9.1

Зважаючи на те, що ударні сили змінюються за короткий проміжок часу досить значно, в теорії удару як *міру взаємодії точок* ( або тіл ) розглядають не самі сили, а їх *імпульси*. Вектор

$$\bar{S}^{y\partial} = \int_0^{\tau} \bar{F}^{y\partial} \cdot dt \approx \bar{F}_{cp}^{y\partial} \cdot \tau \quad (9.2)$$

називається **ударним імпульсом**. Ударний імпульс  $\bar{S}^{y\partial}$  при малому часі удару  $\tau$  є скінченною величиною.

Розглянемо матеріальну точку, що рухається відносно інерціальної системи відліку і на яку, крім звичайних, діють ударні сили. Позначимо її швидкість до удару  $\bar{v}$ , а після удару  $\bar{u}$ . Тоді за час удару для неї буде справедливою теорема про зміну кількості руху:

$$m(\bar{u} - \bar{v}) = \sum_{k=1}^N \bar{S}_k^{y\partial}, \quad (9.3)$$

де  $N$  – кількість ударних сил. У праву частину рівняння (9.3) не входять імпульси неударних сил (які є сталими, або за час удару змінюються незначно, наприклад, сила ваги точки), оскільки при малому часі удару їх імпульси будуть малими в порівнянні з імпульсами ударних сил.

Рівняння (9.3) є *основним рівнянням теорії удару матеріальної точки* і формулюється наступним чином: *зміна кількості руху матеріальної точки під час удару дорівнює геометричній сумі діючих на точку ударних імпульсів.*

Відмітимо властивість переміщення точки під час удару. За визначенням,  $\bar{V}_{cp} = \frac{\Delta \bar{r}}{\tau}$ , звідки  $\Delta \bar{r} = \bar{V}_{cp} \cdot \tau$ . Це означає, що при малому часі удару  $\tau$  переміщення точки за цей час  $\Delta \bar{r}$  є малою величиною.

Отже, наведемо *основні результати елементарної теорії удару матеріальної точки*:

- 1) зміна швидкості точки під час удару визначається основним рівнянням теорії удару (9.3);
- 2) дією неударних сил під час удару можна нехтувати;
- 3) переміщенням точки під час удару можна нехтувати.

Основними завданнями теорії удару матеріальної точки є визначення її швидкості після удару при відомій швидкості до удару, а також визначення ударних імпульсів.

**Зауваження.** Наведені результати можна застосовувати не тільки до ударних сил, що виникають у точці контакту тіл, але й до будь-яких інших, закон зміни за часом яких має вигляд функції на рис. 9.1. Такі сили виникають при вибуху в порожнині, при розповсюдженні пружних хвиль у суцільному середовищі, при розривах у потоці рідини або газу.

## 9.2. Гіпотеза Ньютона про коефіцієнт відновлення при ударі

Розглянемо процес удару двох тіл. При їх зіткненні у точці контакту виникають ударні сили, які діють на кожне тіло, є рівними за модулем, протилежними за напрямом і лежать на спільній лінії дії (третій закон Ньютона).

Введемо припущення:

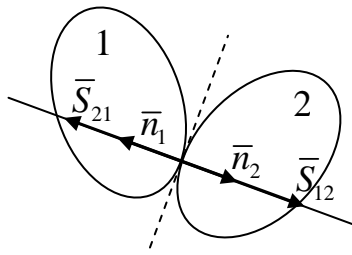


Рис. 9.2

- 1) ударні сили і їх імпульси  $\bar{S}_{12}, \bar{S}_{21}$  напрямлені уздовж спільної нормалі до поверхонь тіл у точці їх контакту (рис. 9.2);
- 2) силами тертя у точці контакту можна нехтувати;
- 3) при ударі необхідно враховувати деформування тіл.

Процес удару можна поділити на дві фази.

*Перша фаза* – зближення тіл по спільній нормалі, проекція відносної швидкості точки контакту на нормаль зменшується до нуля, кінетична енергія руху переходить у внутрішню потенціальну енергію деформації тіл.

*Друга фаза* – тіла, що відновлюють свою форму, віддаляються одне від одного, проекція відносної швидкості точки контакту на нормаль збільшується, але не досягає свого значення до удару, внутрішня потенціальна енергія деформації знов переходить у кінетичну енергію руху, проте частина її уходить на нагрівання тіл і залишкові деформації.

Як показують досліди, в першому наближенні можна прийняти **гіпотезу Ньютона**: відношення модуля нормальної складової відносної швидкості точки контакту тіл після удару до її значення до удару є величиною сталою, яка в певних межах не залежить від відносної швидкості і мас тіл, а визначається тільки матеріалом тіл, що стикаються. Цю сталу величину, яку позначимо через  $k$  називають **коефіцієнтом відновлення** при ударі

$$k = \frac{|u_n^r|}{|v_n^r|}. \quad (9.4)$$

Значення коефіцієнта відновлення знаходяться в межах  $0 \leq k \leq 1$ .

При  $k = 0$  удар називають **абсолютно непружним**. У цьому разі весь процес удару відбувається в першій фазі удару. Форма тіл не відновлюється.

Обидва тіла після удару рухаються як одне ціле, втративши частину кінетичної енергії на деформацію і тепло.

При  $k = 1$  удар називають **абсолютно пружним**. Втрати кінетичної енергії не відбувається і тіла у другій фазі удару повністю відновлюють свою форму. Це – граничні випадки.

В інших випадках  $0 < k < 1$  і удар називають **не зовсім пружним** або просто **пружним**.

Наведемо значення коефіцієнта відновлення для деяких матеріалів: дерево – 0,5; сталь – 0,56; скло – 0,94.

**Приклад 1.** Експериментальне визначення коефіцієнта відновлення.

### **Розв’язання**

На масивну плиту з висоти  $h_1$  кидають кульку без початкової швидкості. Плита і кулька виготовлені з того самого матеріалу. Кулька ударяється об плиту зі швидкістю  $v = \sqrt{2gh_1}$  (цю формулу можна отримати за допомогою, наприклад, теореми про зміну кінетичної енергії точки). Після удару кулька відскочить на висоту  $h_2$  зі швидкістю  $u = \sqrt{2gh_2}$ . Оскільки ці швидкості нормальні до поверхні плити, то

$$k = \frac{|u_n^r|}{|v_n^r|} = \frac{|u|}{|v|} = \frac{\sqrt{2gh_2}}{\sqrt{2gh_1}} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}. \quad (9.5)$$

Таким чином, заміряючи висоти падіння  $h_1$  і відскоку кульки від поверхні  $h_2$ , можна визначити коефіцієнт відновлення  $k$ .

**Приклад 2.** Матеріальна точка маси  $m$  падає на горизонтальну поверхню з того самого матеріалу зі швидкістю  $v$  під кутом падіння  $\alpha$ . Коефіцієнт відновлення дорівнює  $k$ . Потрібно визначити кут відбиття  $\beta$ , швидкість точки після удару  $u$  і ударний імпульс  $S^{y0}$  реакції поверхні (рис. 9.3).

### Розв'язання

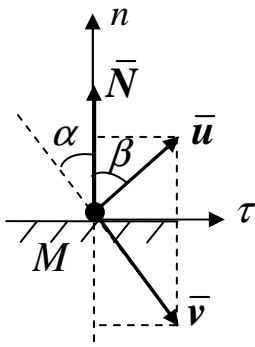


Рис. 9.3

На матеріальну точку під час удару об поверхню діють сила тяжіння і нормальна реакція поверхні  $\bar{N}$ . Сила тяжіння не є ударною, тому діючий на точку ударний імпульс визначається як

$$\bar{S}^{y\partial} = \int_0^{\tau} \bar{N} \cdot dt.$$

Проведемо осі натуральної системи відліку  $\tau, n$  і спроектуємо векторне рівняння (9.3) на ці осі:

$$\begin{cases} m(u_{\tau} - v_{\tau}) = S_{\tau}^{y\partial} \\ m(u_n - v_n) = S_n^{y\partial}, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} m(u \cdot \sin \beta - v \cdot \sin \alpha) = 0 \\ m[u \cdot \cos \beta - (-v \cdot \cos \alpha)] = S^{y\partial}. \end{cases} \quad (9.6)$$

Додамо до отриманої системи рівняння (9.4):

$$k = \frac{|u_n|}{|v_n|} = \frac{u \cdot \cos \beta}{v \cdot \cos \alpha}. \quad (9.7)$$

З системи трьох останніх алгебраїчних рівнянь знайдемо три шукані величини. З рівняння (9.7)

$$u = \frac{k \cdot v \cdot \cos \alpha}{\cos \beta}. \quad (9.8)$$

Підставимо отриманий результат у перше рівняння системи (9.6):

$$m \cdot \left[ \frac{k \cdot v \cdot \cos \alpha}{\cos \beta} \cdot \sin \beta - v \cdot \sin \alpha \right] = 0.$$

Звідки  $k \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta - \sin \alpha = 0$ , або  $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{k} \cdot \operatorname{tg} \alpha$ ,

або  $\beta = \arctg\left(\frac{1}{k} \cdot \operatorname{tg} \alpha\right). \quad (9.9)$

Нарешті, з другого рівняння системи (9.6) отримаємо розрахункову формулу для ударного імпульсу:

$$S^{y\partial} = m[u \cdot \cos \beta + v \cdot \cos \alpha],$$

яка з урахуванням формули (9.8) може бути записана у вигляді

$$S^{y\partial} = m \cdot (1 + k) \cdot v \cdot \cos \alpha \quad (9.10)$$

*Проаналізуємо отримані результати (9.9), (9.8), (9.10).*

1. З формул (9.8), (9.9) випливає, що для абсолютно пружного удару ( $k = 1$ ) кут падіння дорівнює куту відбиття  $\alpha = \beta$ , а швидкість точки при ударі за модулем не змінюється  $u = v$ . При пружному ударі ( $0 < k < 1$ ) кут відбиття більший за кут падіння  $\beta > \alpha$  (і тільки при вертикальному падінні  $\beta = \alpha = 0$ ). Модуль швидкості після удару в цьому випадку завжди менший за модуль швидкості до удару  $u < v$ , оскільки  $u \cdot \sin \beta = v \cdot \sin \alpha$  (див. формулу (9.6)), а при вертикальному падінні  $u = k \cdot v$  (див. формулу (9.7)).

2. З формули (9.10) видно, що ударний імпульс при абсолютно пружному ударі ( $k = 1$ ) вдвічі більший за ударний імпульс при абсолютно непружному ударі ( $k = 0$ ) і досягає максимальної величини при вертикальному падінні точки на поверхню (при  $\alpha = 0$ ).

### 9.3. Загальні теореми теорії удару механічної системи

#### 9.3.1. Теорема про зміну кількості руху механічної системи при ударі

Ця теорема в інтегральній формі має такий же вигляд, як і при звичайному навантаженні, але у праву частину будуть входити тільки ударні імпульси:

$$\bar{Q}_2 - \bar{Q}_1 = \sum_{k=1}^n \bar{S}_k^{y\partial e}, \quad (9.11)$$

де  $n$  - число точок системи,  $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2$  - кількість руху системи до і після удару відповідно,  $\bar{S}_k^{y\partial e}$  - зовнішні ударні імпульси.

Формулюється **теорема** наступним чином: *зміна кількості руху механічної системи під час удару дорівнює геометричній сумі ударних імпульсів зовнішніх сил, що діють на систему.*

**Зауваження 1.** При розв'язанні задач векторне рівняння (9.11) звичайно проєктують на осі координат.

**Зауваження 2.** Внутрішні ударні імпульси не можуть змінити кількість руху механічної системи (вони не входять в рівняння (9.11)).

### ***9.3.2. Теорема про зміну моменту кількості руху механічної системи при ударі***

Зазначена теорема в диференціальній формі має такий же вигляд, як і при звичайному навантаженні, але в праву частину будуть входити моменти тільки ударних сил:

$$\frac{d\bar{K}_o}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{M}_o(\bar{F}_k^{y\partial e}), \quad (9.12)$$

де  $n$  - число точок системи,  $\bar{K}_o$  - момент кількості руху системи відносно центру  $O$ ,  $\bar{M}_o(\bar{F}_k^{y\partial e})$  - моменти зовнішніх ударних сил відносно того ж центра.

Оскільки переміщеннями точок системи під час удару можна нехтувати, цю теорему в теорії удару звичайно використовують в інтегральній формі. Розділимо в рівнянні (9.12) змінні й зінтегруємо за часом обидві частини, використовуючи для моменту сили вираз  $\bar{M}_o(\bar{F}_k^{y\partial e}) = \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{y\partial e}$ , де  $\bar{r}_k$  - радіус-вектор  $k$ -ї точки системи, який не змінюється за час удару:

$$\int_0^{\tau} d\bar{K}_o = \int_0^{\tau} \sum_{k=1}^n (\bar{r}_k \times \bar{F}_k^{y\partial e}) dt = \sum_{k=1}^n (\bar{r}_k \times \int_0^{\tau} \bar{F}_k^{y\partial e} dt) = \sum_{k=1}^n (\bar{r}_k \times \bar{S}_k^{y\partial e}),$$

або

$$\bar{K}_{20} - \bar{K}_{10} = \sum_{k=1}^n \bar{M}_o(\bar{S}_k^{y\partial e}). \quad (9.13)$$

Рівняння (9.13) виражає **теорему** про зміну моменту кількості руху механічної системи при ударі в інтегральній формі: *зміна моменту кількості руху механічної системи відносно центра  $O$  під час удару дорівнює геометричній сумі моментів ударних імпульсів зовнішніх сил, які діють на систему, відносно того ж центра.*

Для даної теореми мають місце зауваження, наведені у § 9.3.1.

### 9.3.3. Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи при ударі (теорема Карно)

Введемо ще дві характеристики удару.

Удар двох тіл називається **центральним**, якщо спільна нормаль у точці контакту тіл проходить через їх центри мас. Удар двох тіл називається **прямим**, якщо швидкості центрів мас тіл на початку удару напрямлені по спільній нормалі в точці контакту тіл.

Розглянемо випадок *абсолютно непружного* удару двох тіл, які здійснюють *поступальний рух*. Для простоти розглянемо *прямий* удар двох куль. Він буде також і *центральним*, оскільки нормаль у точці контакту куль проходить через їх центри мас (рис. 9.4).

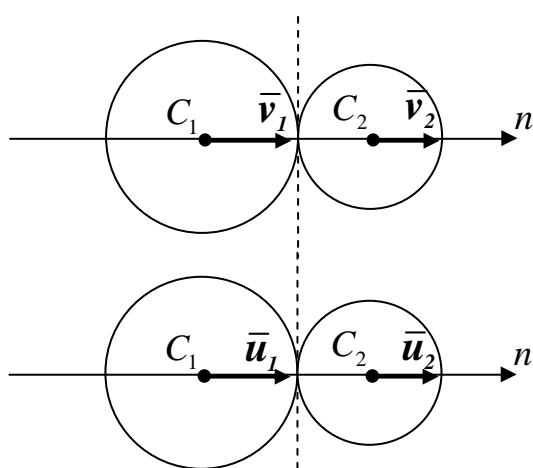


Рис. 9.4

Кінетична енергія системи до удару

дорівнює 
$$T_1 = \frac{M_1 v_1^2}{2} + \frac{M_2 v_2^2}{2}.$$

Після абсолютно непружного удару тіла рухаються з однаковою швидкістю  $u_1 = u_2 = u$  і кінетична енергія після

удару дорівнює 
$$T_2 = \frac{(M_1 + M_2)u^2}{2}.$$

Таким чином, при ударі втрачається кінетична енергія

$$\Delta T = T_1 - T_2 = T_1 - 2T_2 + T_2.$$



Спроектуємо на вісь нормалі  $n$  рівняння теореми про зміну кількості руху системи (9.11)

$$(M_1 + M_2)u - (M_1v_1 + M_2v_2) = 0,$$

звідки

$$(M_1 + M_2)u = M_1v_1 + M_2v_2. \quad (9.14)$$

Тоді

$$2T_2 = (M_1 + M_2)u \cdot u = (M_1v_1 + M_2v_2)u = M_1v_1u + M_2v_2u.$$

Підставимо останню рівність у формулу втраченої кінетичної енергії

$$\Delta T = T_1 - 2T_2 + T_2 = \frac{1}{2}[M_1v_1^2 + M_2v_2^2 - 2M_1v_1u - 2M_2v_2u + M_1u_1^2 + M_2u_2^2]$$

і згрупуємо доданки

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{M_1(v_1 - u)^2}{2} + \frac{M_2(v_2 - u)^2}{2}. \quad (9.15)$$

У формулі (9.15) різниці  $(v_1 - u), (v_2 - u)$  показують, на скільки зменшується при ударі швидкість кожного з тіл, їх називають «**втраченими швидкостями**».

Отже, рівність (9.15) виражає **теорему Карно** про зміну кінетичної енергії механічної системи при ударі: *кінетична енергія, що втрачається системою тіл при абсолютно непружному ударі, дорівнює тій кінетичній енергії, яку б мала система за умови, що її тіла рухались із «втраченими швидкостями».*

**Зауваження.** Розмірковуючи аналогічним чином, можна узагальнити теорему (9.15) на випадок пружного удару ( $0 < k < 1$ ):

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{1-k}{1+k} \cdot \left[ \frac{M_1(v_1 - u_1)^2}{2} + \frac{M_2(v_2 - u_2)^2}{2} \right]. \quad (9.16)$$

Проаналізуємо *деякі випадки при абсолютно непружному ударі, якщо друге тіло було до удару нерухомим* ( $v_2 = 0$ ). У цьому разі з рівняння

(9.14) знаходимо  $u = \frac{M_1 v_1}{M_1 + M_2}$ . Тоді формула для кінетичної енергії  $T_2$

набуває вигляду

$$T_2 = \frac{M_1 + M_2}{2} \cdot u^2 = \frac{M_1 + M_2}{2} \cdot \left( \frac{M_1 v_1}{M_1 + M_2} \right)^2 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \cdot \frac{M_1 v_1^2}{2} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \cdot T_1. \quad (9.17)$$

З рівняння (9.17) випливає наступне.

1. Якщо для практичних дій необхідно, щоб кінетична енергія до удару якомога більше переходила в кінетичну енергію руху тіл після удару ( $T_2 \approx T_1$ ), треба виконати умову  $M_1 \gg M_2$ . Тобто маса тіла, що ударяється, була б якомога більшою за масу тіла, по якому відбувається удар. Ця ситуація виникає при забиванні цвяхів, палів тощо.
2. Якщо для практичних дій необхідно, щоб кінетична енергія до удару якомога більше переходила в потенціальну енергію деформації тіла після удару ( $T_2 \approx 0$ ), треба виконати зворотню умову  $M_2 \gg M_1$ . Тобто маса тіла, що ударяється, була б якомога меншою за масу тіла, по якому відбувається удар. Ця ситуація виникає при куванні, штампуванні металів тощо.

#### ***9.3.4. Поняття про центр удару***

Обговоримо коротко основні висновки, що відбуваються при ударі по тілу, яке обертається навколо нерухомої осі. В опорах осі (звичайно це підшипник і підп'ятник) виникають ударні реакції, що можуть призвести до передчасної руйнації цих опор і осі. Щоб удар не передавався на опори А і В осі обертання АВ, мають виконуватися наступні умови (рис. 9.5):

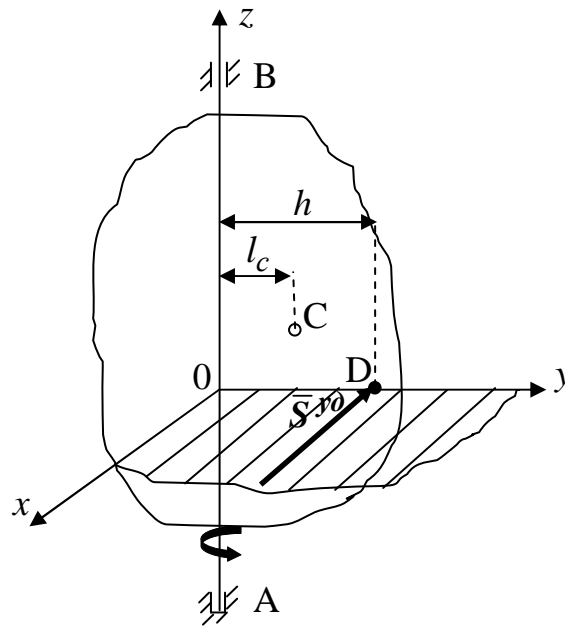


Рис. 9.5

- 1) площина  $xOy$ , що містить ударний імпульс  $\vec{S}^{y\partial}$  і перпендикулярна до осі обертання, має перетинатися з нею в точці  $O$ , для якої вісь обертання є головною віссю інерції (для якої відцентрові моменти інерції, які містять індекс осі, дорівнюють нулю);
- 2) лінія дії ударного імпульсу має бути перпендикулярною до площини  $yOz$ , що містить центр мас тіла і вісь обертання;
- 3) лінія дії ударного імпульсу має бути віддалена від осі обертання на

відстань  $h$ , яка дорівнює зведений довжині фізичного маятника ( $h = \frac{I_z}{M \cdot l_c}$ ,

де  $I_z$  - момент інерції тіла відносно осі обертання,  $l_c$  - відстань від осі обертання до центра мас тіла). При цьому лінія дії ударного імпульсу і центр мас тіла мусять знаходитися з одного боку від осі обертання.

Точка, в якій прикладений ударний імпульс, що задовольняє всім наведеним умовам і не викликає ударних реакцій, називається **центром удару**.

**Зауваження.** Якщо вісь обертання проходить через центр мас тіла, то центр удару не існує і будь-який удар буде викликати ударні реакції.

**Приклад 3.** Визначити положення центра удару палицею по нерухомій опорі К, якщо тримати палицю рукою за її кінець О (рис. 9.6).

**Розв'язання**

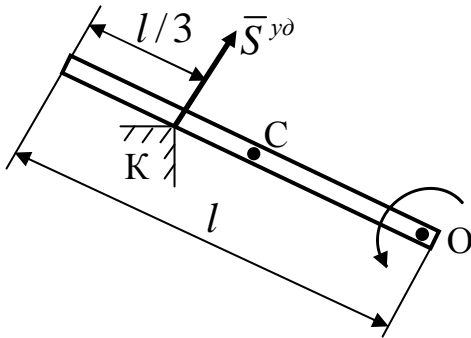


Рис. 9.6

Будемо вважати палицю однорідним стержнем завдовжки  $l$ , а вісь її обертання такою, що проходить перпендикулярно до площини рисунка через точку О. Момент інерції стержня відносно осі, що проходить через його кінець,

дорівнює (див. [3, 5])  $I_z = \frac{ml^2}{3}$ , де  $m$  - маса стержня, а відстань від осі обертання до центра мас  $l_C = l/2$ . Тоді лінія дії ударного імпульсу  $\bar{S}^{ud}$  має бути віддаленою від осі обертання на відстань  $OK = h$ , що дорівнює

$$h = \frac{I_z}{m \cdot l_C} = \frac{\frac{ml^2}{3}}{m \cdot \frac{l}{2}} = \frac{2}{3}l.$$

Отже, центр удару буде віддаленим від руки на дві третини довжини стержня або на третину довжини від його вільного кінця.

Таким чином, щоб рука не випробувала ударних реакцій, палицею потрібно ударяти тим місцем, яке відстоїть від вільного кінця на третину її довжини.

## ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що в аналітичній механіці називається в'язями?
2. Який вигляд має рівняння в'язі?
3. Дайте означення стаціонарним в'язям.
4. Дайте означення голономним в'язям.
5. Дайте означення утримуючим в'язям.
6. Дайте означення ідеальним в'язям. Наведіть приклади.
7. Що називається можливим переміщенням точки і механічної системи?
8. Що називається можливою роботою сили?
9. Сформулюйте принцип можливих переміщень. Що встановлює цей принцип?
10. Сформулюйте загальне рівняння динаміки. Що дозволяє складати це рівняння?
11. Що називається числом степенів вільності механічної системи?
12. Що називається узагальненими координатами і узагальненими швидкостями. Який фізичний зміст вони можуть мати?
13. Що називається узагальненою силою?
14. Наведіть три способи визначення узагальнених сил.
15. Які сили називаються консервативними?
16. Як визначається потенціальна енергія механічної системи?
17. Який вигляд мають рівняння рівноваги системи в узагальнених координатах?
18. Запишіть рівняння рівноваги консервативної системи.
19. Запишіть рівняння Лагранжа другого роду.
20. Запишіть рівняння Лагранжа другого роду для консервативної системи.
21. Як визначити положення рівноваги консервативної системи?
22. Наведіть визначення (математичне і фізичне) стійкості положення рівноваги механічної системи.

23. Наведіть визначення (математичне і фізичне) асимптотичної стійкості положення рівноваги механічної системи.
24. Як визначити стійкість положення рівноваги консервативної системи з одним степенем вільності?
25. Як визначити стійкість положення рівноваги консервативної системи зі скінченним числом степенів вільності?
26. Які параметри називають узагальненими коефіцієнтами жорсткості?
27. Які параметри називають узагальненими коефіцієнтами інерції?
28. Як визначається колова частота малих вільних коливань?
29. Наведіть властивості малих власних коливань консервативної системи.
30. Як визначається період малих затухаючих коливань?
31. Запишіть рівняння вимушених коливань механічної системи при дії довільної збурюючої сили.
32. Що називається коефіцієнтом динамічності, від чого він залежить?
33. Який вигляд мають кінетична і потенціальна енергії механічної системи з двома степенями вільності?
34. Як визначаються власні частоти консервативної системи?
35. Що називається коефіцієнтами форми? Що вони показують? Що таке форма коливань?
36. Від чого залежать власні частоти і коефіцієнти форми коливань?
37. Від чого залежать амплітуди і зсуви фаз вільних коливань?
38. Від чого залежать амплітуди вимушених коливань?
39. При яких умовах настає резонанс?
40. При яких умовах виникає динамічне гасіння коливань?
41. У чому полягає фізична сутність гасіння?
42. В яких механічних системах доцільно використовувати динамічне гасіння коливань?
43. Наведіть методи захисту від вібрацій.
44. Які основні допущення приймаються в теорії малих коливань стержнів?

45. Який закон механіки використовується для отримання диференціального рівняння вільних поздовжніх коливань стержня?
46. Яким методом розшукується розв'язок диференціального рівняння вільних поздовжніх коливань стержня?
47. Що таке граничні умови, для чого вони використовуються?
48. Яке рівняння виражає граничні умови для вільного кінця при поздовжніх коливаннях стержня?
49. Які умови використовуються для визначення сталих інтегрування?
50. Як складається загальний розв'язок диференціального рівняння вільних поздовжніх коливань стержня?
51. Яке рівняння називається частотним?
52. Що таке вузли форми коливань?
53. Якою закономірністю пов'язані кількість вузлів і номер форми коливань?
55. Які закони використовуються для отримання диференціального рівняння вільних поперечних коливань стержня?
56. Яким методом розшукується розв'язок диференціального рівняння вільних поперечних коливань стержня?
57. Яке рівняння виражає граничні умови для защемленого кінця при поперечних коливаннях стержня ?
58. Як складається загальний розв'язок диференціального рівняння вільних поперечних коливань стержня?
60. Яким методом розшуковують розв'язок диференціального рівняння вимушених поперечних коливань стержня?
61. Яка ідея визначення власної частоти використовується у методі Релея?
62. Як можна підібрати наближену власну форму коливань у методі Релея?
63. У якому випадку формула Релея дає точне значення власної частоти?
64. Яке значення має власна частота, обчислена за формулою Релея, по відношенню до дійсного її значення?
65. Яка ідея визначення власної частоти використовується у методі Донкерлі?

66. Яке значення має власна частота, обчислена за формулою Донкерлі, по відношенню до дійсного її значення?
67. Що дозволяє оцінити одночасне застосування двох методів: Релея і Донкерлі?
68. Які основні допущення приймаються в теорії малих коливань пластин і оболонок?
69. Які закони використовуються для отримання диференціального рівняння вільних коливань пластини і оболонки?
70. Яким методом розшукується розв'язок диференціального рівняння?
71. Як вибирають функції власних форм у випадку вільного (шарнірного) обпирання країв пластини (торців циліндричної оболонки)?
72. Які рівняння виражають граничні умови для вільного (шарнірного) обпирання країв пластини (торців циліндричної оболонки)?
73. Як складається загальний розв'язок диференціального рівняння вільних коливань пластини і оболонки?
74. Як отримують частотне рівняння при вільних коливаннях пластини і оболонки при розглянутих граничних умовах?
75. Якою закономірністю пов'язані кількість вузлових ліній і хвильові параметри вільних коливань пластини і оболонки?
76. Наведіть особливості спектрів власних частот пластини й оболонки.
77. Що є мірою взаємодії тіл при ударі?
78. Який вигляд має основне рівняння удару матеріальної точки?
79. Наведіть основні результати теорії удару матеріальної точки.
80. У чому полягає гіпотеза Ньютона при ударі, які межі її застосування?
81. Як формулюється теорема про зміну кількості руху системи при ударі?
82. Як формулюється теорема про зміну моменту кількості руху системи при ударі?
83. Як формулюється теорема про зміну кінетичної енергії системи при ударі?
84. Що називається центром удару?



## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бабаков И.М. Теория колебаний.- М.: Дрофа, 2004.- 509 с.
2. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах: В 3 т. - М.: Наука, 1971-1973. – Т.2.- 624 с.; Т.3.- 487 с.
3. Бутенин Н.В. Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики: В 2 т.- М.: Наука, 1979. –Т.2.- 461 с.
4. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике.- М.: Наука, 1980.- 446 с.
- 5.Павловский М.А. Теоретична механіка: Підручник. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
6. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний.- М.: Наука, 1971.- 239 с.
7. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории упругих колебаний.- М.: Машиздат, 1967.- 336 с.
8. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механки. - М.: Высш. шк., 2001. – 416 с.
9. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. Пер. с англ.- М.: Наука, 1967.- 440 с.
- 10.Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: В 2 т. – М.: Высш. шк., 1977. – Т.2.- 532 с.
11. Яблонский А.А., Норейко С.С. Курс теории колебаний.- М.: Высш. шк., 1975.- 255 с.
12. Шпачук В.П., Золотов М.С., Рубаненко О.І., Гарбуз А.О. Теоретична механіка: Навчально-методичний посібник для студентів технічних спеціальностей і завдання для контрольних робіт студентів факультету заочної освіти. – Харків: ХНАМГ, 2007. – 134 с.
13. Шпачук В.П., Плотницкая Я.В. Двумерное преобразование Лапласа в задачах теории упругости // Коммунальное хозяйство городов: Науч.-техн. сб. Вып. 72. – К.: Техніка, 2007.- с. 269-274.
14. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению.- М.: Высш. шк., 1965.- 468 с.

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	1
I. ОСНОВИ АНАЛІТИЧНОЇ МЕХАНІКИ .....	5
1. Основні поняття і принципи аналітичної статички й динаміки .....	6
1.1. Механічні в'язі і їх класифікація .....	6
1.2. Можливі переміщення. Можлива робота. Ідеальні в'язі .....	9
1.3. Принцип можливих переміщень.....	12
1.4. Загальне рівняння динаміки .....	15
2. Рівняння рівноваги і руху механічної системи в узагальнених координатах .....	17
2.1. Число степенів вільності. Узагальнені координати й узагальнені швидкості .....	17
2.2. Узагальнені сили і способи їх визначення.....	18
2.3. Рівняння рівноваги механічної системи в узагальнених координатах .....	24
2.4. Диференціальні рівняння руху механічної системи в узагальнених координатах (рівняння Лагранжа другого роду) .....	25
2.5. Рівняння Лагранжа другого роду для консервативних систем .....	29
2.6. Методика розв'язання задач динаміки з використанням рівнянь Лагранжа другого роду .....	30
II. МАЛІ КОЛИВАННЯ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ ЗІ СКІНЧЕННИМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНІВ ВІЛЬНОСТІ.....	33
3. Малі коливання механічної системи навколо положення її стійкої рівноваги .....	33
3.1. Визначення положень рівноваги .....	33
3.2. Стійкість положення рівноваги .....	34
3.3. Визначення стійкості положення рівноваги консервативної системи. Теорема Лагранжа - Діріхле. Критерій Сільвестра.....	37
3.4. Вираження кінетичної енергії системи через узагальнені координати й швидкості .....	44

3.5. Малі коливання консервативної системи з одним ступенем вільності навколо положення стійкої рівноваги .....	45
3.6. Вплив сил опору на малі коливання консервативної системи з одним ступенем вільності навколо положення стійкої рівноваги .....	53
3.7. Малі вимушені коливання механічної системи з одним ступенем вільності навколо положення стійкої рівноваги .....	60
3.7.1. Випадок довільної збурюючої сили .....	60
3.7.2. Випадок гармонійної збурюючої сили .....	65
3.7.3. Коефіцієнт динамічності при дії гармонійної збурюючої сили .....	67
4. Малі коливання механічних систем зі скінченним числом ступенів вільності навколо положення стійкої рівноваги .....	70
4.1. Вільні коливання консервативної системи з двома ступенями вільності .....	70
4.2. Вимушені коливання системи з двома ступенями вільності .....	75
4.3. Динамічний гаситель коливань.....	77
4.4. Коливання систем зі скінченним числом ступенів вільності .....	81
4.5. Методи захисту від вібрацій .....	81
III. МАЛІ КОЛИВАННЯ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ .....	84
5. Поздовжні коливання прямих стержнів (балок) .....	85
5.1. Диференціальне рівняння руху елемента стержня при вільних коливаннях .....	85
5.2. Розв'язання диференціального рівняння вільних поздовжніх коливань стержня .....	86
5.3. Граничні умови.....	88
5.4. Приклади розрахунку поздовжніх коливань пружного стержня .....	89
6. Поперечні коливання прямих стержнів (балок).....	94
6.1. Диференціальне рівняння руху елемента стержня .....	94
6.2. Розв'язання диференціального рівняння вільних поперечних коливань стержня .....	96

6.3. Граничні умови.....	98
6.4. Приклад розрахунку власних частот і форм поперечних коливань пружного стержня .....	100
6.5. Вимушені поперечні коливання стержня .....	105
7. Наближені методи визначення власних частот поперечних коливань стержнів.....	108
7.1. Метод Релея (енергетичний метод).....	108
7.2. Метод Донкерлі (метод «зведення» мас).....	111
7.3. Приклад розрахунку основної частоти поперечних коливань стержня з приєднаними масами.....	114
8. Вільні коливання пружних пластин і оболонок.....	120
8.1. Вільні поперечні коливання пластини .....	121
8.2. Поперечні коливання пластини з шарнірно (вільно) обпертими краями.....	123
8.3. Вільні коливання колової циліндричної оболонки з вільно (шарнірно) обпертими торцями .....	127
IV. ОСНОВИ ТЕОРІЇ УДАРУ.....	136
9. Елементарна теорія удару .....	136
9.1. Основні визначення і рівняння теорії удару матеріальної точки... 136	
9.2. Гіпотеза Ньютона про коефіцієнт відновлення при ударі .....	138
9.3. Загальні теореми теорії удару механічної системи .....	142
9.3.1. Теорема про зміну кількості руху механічної системи при ударі .....	142
9.3.2. Теорема про зміну моменту кількості руху механічної системи при ударі .....	143
9.3.3. Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи при ударі (теорема Карно).....	144
9.3.4. Поняття про центр удару .....	146
ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ .....	149
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	153

# НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

**Рубаненко Олександр Ігоревич,  
Шпачук Володимир Петрович**

## **Теоретична механіка. Спецкурс**

### ***Конспект лекцій***

(для студентів денної і заочної форм навчання бакалаврів  
за напрямом 6.060101 «Будівництво»)

Редактор *М. З. Аляб'єв*

Комп'ютерне верстання *Ю. П. Степась*

План 2008, поз. 61 Л

---

Підп. до друку 03.06.08  
Друк на ризографі.  
Зам. №

Формат 60x84 1/16  
Ум. друк. арк. 6,5  
Тираж 150 пр.

Видавець і виготовлювач:  
Харківська національна академія міського господарства  
вул. Революції, 12, Харків, 61002  
Електронна адреса: [rectorat@ksame.kharkov.ua](mailto:rectorat@ksame.kharkov.ua)  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:  
ДК № 731 від 19.12.2001